Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Crupi

Condizioni di eccezionalità e struttura dell'equazione di stato generalizzata in M.F.D.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.6, p. 808–814.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_6_808_0>

Fisica matematica. — *Condizioni di eccezionalità e struttura dell'equazione di stato generalizzata in M.F.D.* (*). Nota di GIOVANNI CRUPI (**), presentata (***) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — We point out a set of generalized state equations $p = \psi(\rho, A)$ requiring the full exceptionality of the M.F.D. system for a one-dimensional flow. Precisely we find that the $\psi(\rho, A)$ functions must satisfy a second order parabolic equation; so we are able to determine a set of solutions expressed by means of two arbitrary functions depending on the Riemann invariant A/ρ^2.

Le motivazioni che suggeriscono di postulare in magnetofluidodinamica un'equazione di stato dipendente, a priori, anche da grandezze elettromagnetiche sono state esposte in una precedente Nota [1].

Nel quadro di tale visione sono stati studiati, sia nella [1] che in una successiva Nota [2], problemi relativi alla propagazione dei fronti d'onda di discontinuità, nello schema di un processo magnetofluidodinamico isotermico che ha sede in un fluido non viscoso, omogeneamente costituito ed elettricamente conduttore con conducibilità $\sigma \to \infty$.

La densità di corrente di spostamento $\dot{D}$ si è ritenuta trascurabile rispetto a quella di conduzione. Per ciò che riguarda il contributo elettromagnetico all'equazione di stato si è postulato che esso fa intervenire, accanto alla densità di massa ρ, la densità propria di carica elettrica $\rho_0^{(e)}$ e la densità di azione.

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{B^2}{\mu} - \frac{D^2}{\varepsilon}\right), \tag{1}$$

cioè due invarianti elettromagnetici. Così si è concepita un'equazione di stato della forma:

$$p = \psi(\rho, A), \tag{2}$$

ritenendo trascurabile il contributo di $\rho_0^{(e)}$.

Nella [1] è stato, tra l'altro, messo in evidenza come un'equazione di stato dipendente anche da grandezze elettromagnetiche permette di caratterizzare nuovi modi di propagazione dei fronti d'onda. Nella [2], sono stati considerati dei casi più generali di quelli presi in esame in [1] e l'indagine è stata anche rivolta ad accertare l'eventuale carattere eccezionale delle onde di discontinuità. È noto che, [3], l'eccezionalità del fronte d'onda consiste

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei contratti di Ricerca del C.N.R., G.N.F.M.
(**) Istituto Matematico dell'Università di Messina.
(***) Nella seduta del 10 giugno 1976.

nel fatto che esso non evolve in onda d'urto. L'eccezionalità delle onde pone delle condizioni sulla $\psi(\rho, A)$.

Ricordiamo che in una recente Nota di Boillat e Ruggeri, [4], sulla teoria delle onde elastiche, imponendo la *condizione di eccezionalità*, sono stati tra altri risultati, ritrovati anche noti potenziali di Tolotti [5] e di Grioli [6].

È nella tematica di tali ricerche che si collega il presente lavoro. E più precisamente, lo scopo della presente Nota è quello di ricercare le informazioni che si possono ottenere sulla incognita funzione $\psi(\rho, A)$, che figura nell'equazione complementare (2), imponendo al seguente sistema differenziale

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial t} + v\dfrac{\partial B}{\partial x} + B\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \\[2ex] \rho\dfrac{\partial v}{\partial t} + \rho v\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{\mu}B\dfrac{\partial B}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

di essere completamente eccezionale.

Le (I), valide in un riferimento galileiano $S(0, x, y, z, t)$, sono state dedotte da equazioni più generali, considerate in [1], sulla base delle seguenti ipotesi: *a*) $\boldsymbol{v}(v, 0, 0)$ e $\mathbf{B}(0, 0, B)$ costanti in direzione ed ortogonali tra loro; *b*) tutte le funzioni incognite dipendenti dalla sola coordinata spaziale x e dal tempo.

Si perviene, tra l'altro, al risultato che la condizione di completa eccezionalità del sistema (I) si traduce per la $\psi(\rho, A)$ nel vincolo differenziale espresso dall'equazione parabolica:

$$\text{(3)}\qquad \rho^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + 4\rho A\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\,\partial A} + 4A^2\frac{\partial^2\psi}{\partial A^2} + 2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + 6A\left(1 + \frac{\partial\psi}{\partial A}\right) = 0$$

Infine, in termini finiti, si trova che una classe di funzioni $\psi(\rho, A)$ compatibili con la completa eccezionalità di (I) è fornita da

$$\text{(4)}\qquad \psi = h\left(\frac{A}{\rho^2}\right) - \frac{1}{\rho}g\left(\frac{A}{\rho^2}\right) - A,$$

dove h e g sono due funzioni arbitrarie dell'invariante di Riemann A/ρ^2.

1. Per $\sigma \to \infty$, come nel nostro schema [1], si ha $\mathbf{D} = -\boldsymbol{v}\wedge\mathbf{B}$ e quindi, dopo l'ipotesi già fatta che $\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{B} = 0$, si trova

$$\text{(5)}\qquad D^2 = \varepsilon^2 v^2 B^2.$$

Dopo la (5), la (1) è suscettibile della forma

$$A = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}(1 - v^2/c^2) \tag{6}$$

dove si è posto $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Nello schema del presente lavoro è coerente ritenere $v^2 \ll c^2$ e, quindi, trascurando v^2/c^2 rispetto all'unità, la (6) si particolarizza nella

$$A = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}. \tag{7}$$

Segue così che l'equazione complementare (2), dopo la (7), può riguardarsi come una relazione tra p, ρ e B. Pertanto, la terza equazione di (I), tenuto conto della (2) e della (7), si può trascrivere nella forma:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{B}{\mu}\left(1 + \frac{\partial\psi}{\partial A}\right)\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}. \tag{8}$$

Le prime due equazioni di (I) assieme alla (8), qualora la ψ fosse conosciuta, fornirebbero un sistema di tre equazioni nelle tre incognite scalari v, B e ρ. Nello schema della presente ricerca, invece, è proprio sulla natura della ψ che si vuole indagare, e precisamente ci domandiamo quale deve essere la sua struttura affinché il sistema (I) sia completamente eccezionale.

2. Sia

$$\varphi(x, t) = 0 \tag{9}$$

l'equazione di un eventuale fronte d'onda di discontinuità attraverso cui saltano le derivate prime delle funzioni B, v e ρ.

Conveniamo di indicare, seguendo le tecniche usuali [3], i salti delle derivate prime rispetto a φ premettendo il simbolo δ alle grandezze interessate. Più precisamente,

$$\left\{\begin{aligned} &\delta v = \left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right] = \underset{\text{stato pert.}}{\left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right]_{\varphi=+0}} - \underset{\text{stato impert.}}{\left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right]_{\varphi=-0}} \\ &\delta B = \left[\frac{\partial B}{\partial\varphi}\right] \quad , \quad \delta\rho = \left[\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right]. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Pertanto, applicando l'operatore δ ad ambo i membri delle prime due equazioni di [I] ed alla (8), si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} &w\delta B + B\delta v = 0 \\ &w\delta\rho + \rho\delta v = 0 \\ &\frac{B}{\rho\mu}\left(1 + \frac{\partial\psi}{\partial A}\right)\delta B + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\delta\rho + w\delta v = 0 \end{aligned}\right. \tag{11}$$

dove

$$W = -\lambda + v \quad , \quad -\lambda = \frac{\partial\varphi/\partial t}{|\operatorname{grad}\varphi|} . \tag{12}$$

Con λ si è indicata la velocità normale di avanzamento del generico punto del fronte rispetto ad S, mentre W indica la velocità normale di propagazione rispetto al fluido mobile.

Imponendo al sistema (11) di ammettere, oltre a quella nulla, anche soluzioni significative, si trovano per W le seguenti determinazioni

$$W = 0 \quad , \quad W = \mp\sqrt{\frac{B^2}{\rho\mu}\left(1 + \frac{\partial\psi}{\partial A}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial\rho}} . \tag{13}$$

Il fronte d'onda associato alla W espressa dalla $(13)_1$ si appoggia sempre alla medesime particelle fluide e perciò viene chiamato onda materiale. Le due determinazioni di W espresse dalla $(13)_2$ alludono, invece, a due distinti modi di propagazione dei fronti d'onda in seno al fluido.

È facile dimostrare che l'onda materiale associata alla $(13)_1$ ha carattere eccezionale, cioè non evolve in onda d'urto, indipendentemente dalla struttura di $\psi(\rho, A)$.

Sostituendo la $(13)_1$ nelle (11) si ottiene il seguente sistema

$$\delta v = 0 \quad , \quad \frac{B}{\mu}\left(1 + \frac{\partial\psi}{\partial A}\right)\delta B + \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\,\delta\rho = 0. \tag{14}$$

La $(14)_1$ esprime che attraverso l'onda materiale associata alla $(13)_1$ il salto della derivata di v rispetto a φ è nullo, mentre la $(14)_2$ esprime che, per

$$1 + \frac{\partial\psi}{\partial A} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \neq 0 ,$$

i salti δB e $\delta\rho$ sono tra loro proporzionali. La $(14)_2$ può anche essere posta nella forma

$$\delta\left(\frac{B^2}{2\mu} + \psi\right) = 0$$

cioè, dopo la (7),

$$\delta(A + \psi) = 0 \tag{15}$$

e questa esprime che attraverso il fronte d'onda associato alla $(13)_1$ è continua la derivata rispetto a φ della quantità $A + \psi$.

Infine, notiamo che dalla $(12)_1$, dopo la $(13)_1$, si trae $\delta\lambda = \delta v$, e questa, invocando la $(14)_1$, si specializza nella

$$\delta\lambda = 0 . \tag{16}$$

Con la (16) resta, appunto, dimostrato che il fronte d'onda associato alla velocità di propagazione $(13)_1$ ha carattere eccezionale, indipendentemente dalla natura della funzione $\psi(\rho, A)$.

3. Passiamo, ora, a ricercare la condizione a cui deve soddisfare la funzione $\psi(\rho, A)$ affinché anche i fronti d'onda associati alle $(13)_2$ abbiamo carattere eccezionale. Imponendo la condizione di eccezionalità, cioè $\delta\lambda = 0$, alle onde associate alle $(13)_2$, dalla $(12)_1$ si deduce

$$\delta W = \delta v \tag{17}$$

da cui, essendo le W fornite dalle $(13)_2$ funzioni di B e di ρ, si trae

$$\frac{\partial W}{\partial \rho}\,\delta\rho + \frac{\partial W}{\partial B}\,\delta B - \delta v = 0 \tag{18}$$

e questa, dopo le prime due delle (11), conduce alla

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{B}{\rho}\,\frac{\partial W}{\partial B} - \frac{W}{\rho} = 0 \tag{19}$$

che esprime la condizione cui devono soddisfare le velocità di propagazione W, fornite dalla $(13)_2$, se le onde ad esse associate hanno carattere eccezionale.

Infine, tenendo conto della $(13)_2$ e della (7), dalla (19) si trae l'equazione differenziale (3).

Dunque, possiamo affermare che condizione necessaria affinché il sistema (I) sia completamente eccezionale è che la funzione $\psi(\rho, A)$ a secondo membro dell'equazione complementare (2) sia soluzione dell'equazione di condizione fornita dalla (3).

Chiudiamo questo numero osservando che la (17) ci consente di trascrivere il sistema (11) nella forma

$$\delta(WB) = 0 \quad , \quad \delta(W\rho) = 0 \quad , \quad \delta(\rho W^2 + A + \psi) = 0. \tag{20}$$

Per trasformare la $(11)_3$ nella $(20)_3$, oltre che della (17), si è tenuto conto anche della $(20)_2$ e della (7). Evidentemente, le (20) esprimono che le derivate rispetto a φ delle quantità

$$WB \quad , \quad W\rho \quad , \quad \rho W^2 + A + \psi \tag{21}$$

restano continue attraverso gli eventuali fronti d'onda eccezionali associati alle velocità di propagazione fornite dalle $(13)_2$.

4. In questo numero concluderemo il lavoro con la determinazione di una classe di funzioni $\psi(\rho, A)$ soddisfacenti all'equazione (3) e dipendenti da due funzioni arbitrarie dell'invariante di Riemann A/ρ^2.

Osserviamo che il sistema (20) può essere posto anche nella forma

$$(22) \qquad \delta\,(W^2 A) = 0 \quad , \quad \delta\,(W^2 \rho^2) = 0 \quad , \quad \delta\,(\rho W^2 + \psi) = 0.$$

Pertanto, supponendo che f, g ed h siano tre funzioni le cui derivate prime risultino continue attraveso il fronte d'onda, è lecito porre

$$(23) \qquad W^2 A = f \quad , \quad W^2 \rho^2 = g \quad , \quad \rho W^2 + A + \psi = h.$$

Dalle prime due delle (23) si ottiene

$$(24) \qquad f = \frac{A}{\rho^2}\, g$$

e da questa, essendo $\delta f = \delta g = \delta h = 0$, segue

$$(25) \qquad \delta A/\rho^2 = 0,$$

cioè la quantità

$$(26) \qquad \xi = A/\rho^2$$

è tale che la sua derivata rispetto a φ attraverso un eventuale fronte d'onda *eccezionale* associato alle velocità di propagazione $(13)_2$ è continua.

Dopo la (24) possiamo affermare che, al più, solo due delle tre funzioni f, g, h, a secondo membro delle (23), possono essere tra loro indipendenti. Assumendo come tali g ed h, dalle $(23)_2$ e $(23)_3$ si trae

$$(27) \qquad \psi = h - A - g/\rho.$$

Dovendo h e g soddisfare all'unica condizione che le loro derivate prime rispetto a φ siano continue attraverso eventuali fronti d'onda eccezionali associati alle $(13)_2$, è lecito presumere che esse dipendano dalle variabili ρ ed A per il tramite di una funzione

$$(28) \qquad \eta = \eta\,(\rho\,,A)$$

tale che

$$(29) \qquad \delta\eta = 0\,.$$

Subordinatamente a tale ipotesi, la (27) si può trascrivere nella forma

$$(30) \qquad \psi = h\,(\eta) - A - \frac{g\,(\eta)}{\rho}\,.$$

Infine, ci proponiamo di indagare sulla struttura della (28). Dalla $(13)_2$, tenendo conto anche della (7), si trae che

$$W^2 = \psi_\rho + \frac{2A}{\rho}(1 + \psi_A) \tag{31}$$

e da questa, dopo la (30), si deduce

$$W^2 = \left(\eta_\rho + \frac{2A}{\rho}\eta_A\right)(h' - g'/\rho) + g/\rho^2 \tag{32}$$

dove

$$h' = \frac{dh}{d\eta} \quad \text{e} \quad g' = \frac{dg}{d\eta}.$$

Confrontando la (32) con la $(23)_2$, si trae la seguente equazione di compatibilità

$$\left(\eta_\rho + \frac{2A}{\rho}\eta_A\right)(h' - g'/\rho) = 0$$

da cui, se $h(\eta)$ e $g(\eta)$ si presumono indipendenti tra loro e $h' - g'/\rho \neq 0$, segue

$$\eta_\rho + \frac{2A}{\rho}\eta_A = 0. \tag{33}$$

Così, oltre alla (29), l'argomento da cui dipendono le funzioni h e g, a secondo membro della (30), deve soddisfare anche alla condizione espressa dalla (33). Ebbene, è di facile verifica che la funzione A/ρ^2, indicata con ξ nella (26), soddisfa ad entrambe le condizioni (29) e (33). Pertanto possiamo concludere che la

$$\psi = h(A/\rho^2) - A - \frac{1}{\rho}g(A/\rho^2) \tag{34}$$

rappresenta una classe di funzioni $\psi(\rho, A)$ compatibili con la completa eccezionalità del sistema (I).

È facile verificare che la (34) soddisfa all'equazione (3). Pertanto, a parte il procedimento seguito per caratterizzarla, essa è suscettibile di essere interpretata come una classe di soluzioni della (3) dipendenti da due funzioni arbitrarie dell'invariante di Riemann A/ρ^2.

Si osserva, infine, che la (26) rappresenta la caratteristica doppia della equazione parabolica (3) cui soddisfa la $\psi(\rho, A)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. CRUPI (1961) – «Ist. Lomb. (Rend. Sc.)», *A 95*, 199–214.
[2] G. CRUPI (1974) – «Ann. Mat. pura ed appl. (IV)», *99*, 317–331.
[3] G. BOILLAT (1965) – *La propagation des ondes*, Gauthier-Villars.
[4] G. BOILLAT e T. RUGGERI (1974) – «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova», *51*.
[5] C. TOLOTTI (1943) – «Rend. Mat. Appl.», Serie V, *4*, 34–59.
[6] G. GRIOLI (1966) – «Meccanica», *1*, 15–20.