Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maurizio Fattorosi-Barnaba, Luigi Mamone

Proprietà reticolari di certe classi di topologie

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.6, p. 793–797.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_6_793_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Topologia. — *Proprietà reticolari di certe classi di topologie.* Nota di MAURIZIO FATTOROSI-BARNABA (*) e LUIGI MAMONE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We investigate lattice-theoretical properties concerning certain classes of topologies considered by the first author in a previous paper [2].

1. PRELIMINARI E RISULTATI

Conserviamo le notazioni e le convenzioni di [2], ove si accennava ad alcune classi di topologie: topologie di equivalenza, di congruenza, di clopen, compatibili con una data algebra. In questa sede vogliamo confrontare le prime tre classi tra loro e con la classe delle topologie di un fissato insieme, da un punto di vista reticolare.

Ricordiamo, per comodità del Lettore, alcune notazioni già introdotte in [2]. Se $\mathfrak{A} = \langle A ; F \rangle$ è un'algebra fissata, si indicano con $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$, $\mathcal{C}_A^e$, $\mathcal{C}_A$ rispettivamente l'insieme delle topologie $\mathfrak{A}$-compatibili, l'insieme delle topologie di equivalenza su A, l'insieme delle topologie su A; ad ogni topologia T su A restano associate le due equivalenze seguenti: se $X , Y \subseteq A$ e $a , b \in A$ si definiscono

$$\Phi_T = \{(X,Y) : XK_T = YK_T\} \in \mathcal{E}(2^A)$$

$$\Phi_T^* = \{(a , b) : aK_T = bK_T\} \in \mathcal{E}(A).$$

Introduciamo altre due notazioni: con $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}^{cg}$ e $\mathcal{C}_A^{cl}$ indicheremo rispettivamente le topologie di congruenza su A (indotte cioè dalle congruenze di $\mathfrak{A}$; vedi [2]) e le topologie di clopen (cioè le topologie i cui elementi siano tutti clopen) su A.

Sono ovvie le seguenti relazioni:

a) $\mathcal{C}_A^e \subseteq \mathcal{C}_A^{cl} \subseteq \mathcal{C}_A$

b) $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}^{cg} \subseteq \mathcal{C}_A^e \cap \mathcal{C}_{\mathfrak{A}} \subseteq \mathcal{C}_A^e , \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$

c) $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}} \subseteq \mathcal{C}_A$.

In questo lavoro si dimostra che: 1) *vale sempre l'uguaglianza nelle prime inclusioni di a) e b)*; 2) *tutte le altre inclusioni possono essere proprie*; 3) $\mathfrak{T}_A^e = \langle \mathcal{C}_A^e ; \subseteq \rangle$ *e* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}^{cg} = \langle \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}^{cg} ; \subseteq \rangle = \mathfrak{T}_A^e \cap \mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}$ *sono subreticoli di* $\mathfrak{T}_A = \langle \mathcal{C}_A ; \subseteq \rangle$ *ed anche sub-*$\cap$*-semireticoli completi ma, in generale, non sub-*$\vee$*-semireticoli completi e quindi non subreticoli completi di* $\mathfrak{T}_A$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A.-C.N.R.
(**) Nella seduta del 10 giugno 1976.

2. DIMOSTRAZIONI

Ricordiamo le seguenti ovvie caratterizzazioni di una topologia di clopen:

LEMMA 1. *Sia data* $T \in \mathscr{T}_A$. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni*:

(i) T *è di clopen*;

(ii) *Per ogni* $X \subseteq A$, $X \in T$ *implica* $X^c = A - X \in T$.

(iii) *Per ogni* $X \subseteq A$, $X \in T$ *sse* $X^c = A - X \in T$.

Verifichiamo ora che le prime inclusioni in *a*) e *b*) sono in realtà uguaglianze.

PROPOSIZIONE 1. *Sia* A *un insieme fissato. Sono equivalenti le seguenti affermazioni*:

(i) $T = \bigvee \{T' \in \mathscr{T}_A : \Phi^*_{T'} = \Phi^*_T\}$

(ii) $T \in \mathscr{T}^{cl}_A$

(iii) $T \in \mathscr{T}^e_A$

(iv) $T = T_{\Phi^*_T}$.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii): sia T come in (i), sia $B \in T$ e sia $\mathscr{F} = T \cup \{B^c \cap D : D \in T\}$. $\mathscr{F}$ genera una topologia su A, $T' \supseteq T$. È facile verificare che, per ogni $a, b \in A$, si ha

$$(1) \qquad (a, b) \in \Phi^*_{T'} \quad \textit{sse} \quad \textit{per ogni } F \in \mathscr{F},\ a \in F \quad \textit{sse} \quad b \in F.$$

Mostriamo ora che $\Phi^*_T \subseteq \Phi^*_{T'}$. Sia $(a, b) \in \Phi^*_T$ e sai $F \in \mathscr{F}$: se $F \in T$ allora $a \in F$ sse $b \in F$; se poi $F = B^c \cap D$ e $a \in F$, allora, in quanto $a \in D$ e $D \in T$, anche $b \in D$ e, in quanto $a \in B^c$ e $B \in T$, anche $b \in B^c$ e quindi $b \in F$; simmetricamente se $F = B^c \cap D$ e $b \in F$ anche $a \in F$. In definitiva, per (1), $(a, b) \in \Phi^*_{T'}$.

D'altra parte si verifica facilmente che, per ogni coppia di topologie T, T′ su un fissato insieme A, si ha

$$(2) \qquad T \subseteq T' \quad \textit{sse} \quad \Phi_T \supseteq \Phi_{T'} \quad \textit{implica} \quad \Phi^*_T \supseteq \Phi^*_{T'}.$$

Poichè nel nostro caso è $T \subseteq T'$, segue da (2) che $\Phi^*_{T'} \subseteq \Phi^*_T$ e quindi, per quanto sopra dimostrato, che $\Phi^*_T = \Phi^*_{T'}$: pertanto $T = T'$ e $B^c \in T$. Dunque, per il Lemma 1, T è di clopen.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): è noto che si ha sempre $T \subseteq T_{\Phi^*_T}$ (vedi [2]); basterà quindi dimostrare che se $T \in \mathscr{T}^{cl}_A$ allora $T \supseteq T_{\Phi^*_T}$ e quindi $T = T_{\Phi^*_T} \in \mathscr{T}^e_A$.

Per far ciò osserviamo che ogni topologia di A contiene partizioni di A (almeno A stesso!) e quindi ne contiene una più fine di tutte le altre: sia Φ l'equivalenza associata a tale partizione; si ha dunque $\Phi = \cap \{\Psi \in \mathscr{E}(A) : A/\Psi \subseteq T\}$. Sia poi Φ_c la partizione di A formata dalle componenti connesse indotte da T e sia $C_a = a^{\Phi_c}$ la componente connessa di $a \in A$. In generale, se T viene considerata come topologia di chiusi, si ha $aK_T \subseteq a^{\Phi} \subseteq C_a$ e le inclusioni possono essere proprie.

Dimostriamo ora che, essendo T di clopen, vale la

$$a \in X \in T \quad \textit{implica} \quad C_a \subseteq X\,; \tag{3}$$

infatti se così non fosse si avrebbe

$$\varnothing \neq C_a \cap X \in T \qquad \text{e} \qquad \varnothing \neq C_a - X = C_a \cap X^c \in T$$

perchè T è di clopen: ne seguirebbe che C_a è sconnesso e ciò è assurdo.

Dalla (3) segue allora che $C_a \subseteq aK_T$ e quindi che $aK_T = a^{\Phi} = C_a$. Allora $\Phi = \Phi_c = \Phi_T^*$ e, poichè $A/\Phi \subseteq T$, si ha $T_{\Phi_T^*} = T_{\Phi} \subseteq T$ e quindi la tesi.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): vedi (i) del Lemma in [2].

(iv) $\Rightarrow$ (i): si ha $\Phi^*_{T_{\Phi_T^*}} = \Phi_T^*$ (vedi [2]), quindi

$$T_{\Phi_T^*} \in \{T' \in \mathscr{T}_A : \Phi_{T'}^* = \Phi_T^*\}.$$

D'altra parte è pure $T \subseteq T_{\Phi_T^*}$ (vedi [2]) e pertanto, se $T = T_{\Phi_T^*}$, deve aversi la (i).

Rileviamo il seguente risultato, che consente di concludere che (ii) $\Rightarrow$ (iii) nella Proposizione 1:

COROLLARIO 1. *Sia* $T \in \mathscr{T}_A^e$; *detta* Φ_c *l'equivalenza associata alla partizione in componenti connesse indotta da* T, *si ha*

$$\Phi_T^* = \cap \{\Psi \in \mathscr{E}(A) : A/\Psi \subseteq T\} = \Phi_c\,.$$

Proviamo ora la

PROPOSIZIONE 2. $\mathscr{T}_{\mathfrak{A}}^{cg} = \mathscr{T}_A^e \cap \mathscr{T}_{\mathfrak{A}}$.

Dimostrazione. Per *b*) basta stabilire che $\mathscr{T}_A^e \cap \mathscr{T}_{\mathfrak{A}} \subseteq \mathscr{T}_{\mathfrak{A}}^{cg}$. Se $T \in \mathscr{T}_A^e \cap \mathscr{T}_{\mathfrak{A}}$, poichè $T \in \mathscr{T}_A^e$ dalla (iv) della Proposizione 1 si ha $T = T_{\Phi_T^*}$; poichè $T \in \mathscr{T}_{\mathfrak{A}}$ dal Teorema 1 di [2] segue che $\Phi_T \in \mathscr{C}(2^{\mathfrak{A}})$ e quindi che $\Phi_T^* \in \mathscr{C}(\mathfrak{A})$: pertanto $T \in \mathscr{T}_{\mathfrak{A}}^{cg}$.

Per dimostrare che le altre inclusioni in *a*), *b*) e *c*) sono in generale proprie, si consideri l'algebra $\mathfrak{A} = \langle \{x, y, z\} = A\,; \{f\} \rangle$ dove $f \in A^A$ è definita nel modo seguente: $xf = y$, $yf = x$, $zf = z$. Si ha allora che le topologie sotto elencate (pensate come topologie di chiusi) mostrano la validità di quanto asserito:

α) $\{A, \varnothing, \{y\}\} = T \in \mathcal{T}_A - (\mathcal{T}_{\mathfrak{A}} \cup \mathcal{T}_A^e)$; è ovvio infatti che $T \notin \mathcal{T}_A^e$ (vedi Proposizione 1) e d'altra parte $T \notin \mathcal{T}_{\mathfrak{A}}$ perchè

$$(xK_T) f_* = Af_* = A \supsetneq (xf) K_T = yK_T = \{y\}.$$

β) $\{A, \varnothing, \{x\}, \{y, z\}\} = T \in \mathcal{T}_A^e - \mathcal{T}_{\mathfrak{A}}^{cg}$; infatti la partizione più fine contenuta in T, $\pi = \{\{x\}, \{y, z\}\}$, dà luogo ad una equivalenza $\Phi = \Phi_T^*$ che non è una congruenza di $\mathfrak{A}$; a riprova, si può constatare la non compatibilità di T con $\mathfrak{A}$ osservando che

$$(yK_T) f_* = \{y, z\} f_* = \{x, z\} \supsetneq (yf) K_T = xK_T = \{x\}.$$

γ) $\{A, \varnothing, \{z\}\} = T \in \mathcal{T}_{\mathfrak{A}} - \mathcal{T}_{\mathfrak{A}}^{cg}$; è ovvio anche qui che $T \notin \mathcal{T}_A^e \supseteq \mathcal{T}_{\mathfrak{A}}^{cg}$ (v. Proposizione 1) e la $\mathfrak{A}$–compatibilità può essere accertata con una semplice verifica diretta.

Dimostriamo ora l'ultimo dei risultati annunciati nel § 1.

PROPOSIZIONE 3. *Fissata comunque un'algebra* $\mathfrak{A}$ *di sostegno* A, *si ha che* $\mathfrak{T}_A^e$ *e* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}^{cg}$ *sono subreticoli e sub-* $\cap$ *-semireticoli completi di* $\mathfrak{T}_A$, *ma in generale non sono sub–* $\vee$ *-semireticoli completi, e quindi non sono subreticoli completi, di* $\mathfrak{T}_A$.

Dimostrazione. Per quanto riguarda gli asserti positivi, cominciamo con l'osservare che $\mathcal{T}_A^e$ è chiuso rispetto ad intersezioni qualsiasi, come segue immediatamente dal Lemma 1 e dalla Proposizione 1. Di fatto si ha

$$\bigcap_{i \in I} T_{\Phi_i} = {}^{T}\bigvee_{i \in I} \Phi_i, \tag{4}$$

come si verifica agevolmente sulla base della (4) di [2]. Dalla (4) segue poi che anche $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}}^{cg}$ è chiuso rispetto ad intersezioni qualsiasi. $\mathcal{T}_A^e$ e $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}}^{cg}$ sono chiusi rispetto alle unioni finite: infatti si ha, per ogni $\Phi, \Psi \in \mathcal{E}(A)$

$$T_\Phi \vee T_\Psi = T_{\Phi \cap \Psi}, \tag{5}$$

come si riconosce osservando che $A/\Phi \cup A/\Psi$ è una sottobase di $T_\Phi \vee T_\Psi$ e quindi una base di tale topologia è data da

$$\{a^\Phi \cap b^\Psi \neq \varnothing : a, b \in A\} = A/(\Phi \cap \Psi),$$

che è una base per $T_{\Phi \cap \Psi}$.

Per quanto riguarda gli asserti negativi, esibiamo un controesempio che mostra come, in generale, $\mathcal{T}_A^e$ e $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}}^{cg}$ non siano chiusi rispetto ad unioni infinite.

A tal fine osserviamo che, presa comunque una famiglia $\{T_{\Phi_i} : i \in I\} \subseteq \mathcal{C}_A^e$,

$$(6) \qquad \bigvee_{i \in I} T_{\Phi_i} = T_\Psi \in \mathcal{C}_A^e \quad \textit{implica} \quad \Psi = \bigcap_{i \in I} \Phi_i$$

come si deduce in modo analogo alla (4).

Si considerino ora l'insieme dei numeri reali R e, per ogni $r \in R$ fissato, l'equivalenza Φ_r associata alla partizione $\pi_r = \{(-\infty, r), [r, +\infty)\}$; si verifica facilmente che $T = \bigvee \{T_{\Phi_r} : r \in R\}$ è la cosiddetta topologia del limite inferiore sulla retta reale, che ha come base gli intervalli $[a, b)$ e che $\cap \{\Phi_r : r \in R\} = \Delta_R$: da (6) segue subito che $T \notin \mathcal{C}_A^e$ perchè altrimenti T dovrebbe essere la topologia discreta, mentre è noto che la topologia del limite inferiore è strettamente meno fine della topologia discreta.

Per quel che riguarda il reticolo $\mathfrak{T}_{\mathfrak{A}}^{cg}$ si può ottenere il medesimo risultato, sfruttando il medesimo controesempio, ove si osservi che le Φ_r suddette sono congruenze dell'algebra $\mathfrak{R} = \langle R ; \{\min\} \rangle$ dove

$$\min : R^2 \to R$$
$$(a, b) \to \min(a, b).$$

La Proposizione 3 mostra fra l'altro la validità di quanto asserito senza dimostrazione alla fine del § 1 di [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI (1971) – *Topologie générale* (Hermann).

[2] M. FATTOROSI-BARNABA (1976) – *Sulle topologie compatibili con una data algebra*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *60* (3).

[3] J. L. KELLEY (1955) – *General topology* (D. van Nostrand Co.).

[4] C. LIN (1973) – *The lattice of all partitions on a set*, « Tam. Kong. J. Math. », *4* (2), 117–122.

[5] R. E. LARSON e S. J. ANDIMA (1975) – *The lattice of topologies: a survey*, « Rocky Mountain J. Math. », *5*, 177–198.