Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Grazia Migliori

Calotte di specie s in uno spazio r-dimensionale di Galois

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.6, p. 789–792.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_6_789_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Geometrie finite. — *Calotte di specie s in uno spazio r–dimensionale di Galois*. Nota di GRAZIA MIGLIORI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We prove that the only $K^3_{r,q}$, non contained in any cap of lower kind are the sets projectively equivalent to $5^3_{3,2}$ and $11^3_{4,3}$ constructed in [8] by G. Tallini.

1. INTRODUZIONE

In uno spazio di Galois $S_{r,q}$ (con $q = p^h$, p primo, cfr. [6]) si definisce K–*calotta* un insieme di K punti distinti, di cui mai tre risultino allineati, [3], [4], [5]. Diremo inoltre che una K–calotta è di *specie* s $(2 \leq s \leq r)$, e la denoteremo con $K^s_{r,q}$, se comunque si considerino $s+1$ suoi punti distinti, essi risultino linearmente indipendenti, mentre esista un sottoinsieme di $K^s_{r,q}$, costituito da $s+2$ punti, linearmente dipendenti. Una $K^s_{r,q}$ dicesi completa se non è contenuta in una $(K+1)^s_{r,q}$.

G. Tallini ha dimostrato in [8] che, per $s \leq 4$, ogni $K^s_{r,q}$, è contenuta in una calotta di specie 2; nel caso $s = 3$ egli (§ 3, [8]) costruisce invece due esempi di $5^3_{3,2}$ e $11^3_{4,3}$ non contenute in calotte di specie 2 e pone il problema di esaminare la questione sull'immergibilità di una calotta di specie 3 in una di specie 2. Al riguardo, tra l'altro, dimostra che per ogni intero r esiste un intero q_r tale che, per $q > q_r$, ogni $K^3_{r,q}$ è contenuta in una calotta di specie 2.

Successivamente, Makowski ha provato in [2] che per $q = 2, 3, 4$ le sole $K^3_{r,q}$, non contenute in calotte di specie 2, sono quelle già determinate da Tallini.

Nella presente Nota il problema posto viene completamente risolto, in quanto si proverà che, in ogni $S_{r,q}$, le sole $K^3_{r,q}$, non contenute in calotte di specie 2, sono gli insiemi proiettivamente equivalenti alle $5^3_{3,2}$ e $11^3_{4,3}$ costruite in [8].

Ne segue che per $q \geq 4$ ogni $K^s_{r,q}$ è contenuta in una calotta di specie 2.

2. Nel § 3 di [8] si dimostra il seguente teorema:

Se esiste una $K^3_{r,q}$, *completa e non contenuta in una calotta di specie* 2, *l'intero* k *soddisfa l'equazione seguente*:

$$k^2(q-1) - k(q-3) - 2\sum_{l=0}^{r} q^l = 0 \tag{1}$$

(*) Nella seduta del 10 giugno 1976.

da cui segue:

$$k = \frac{q - 3 + \sqrt{8\,q^{r+1} + q^2 - 6\,q + 1}}{2\,(q - 1)};$$

denotato inoltre con H *il numero di punti a comune di* $K^3_{r,q}$ *con un arbitrario iperpiano* S_{r-1} *di* $S_{r,q}$, H *soddisfa l'equazione:*

$$qH^2 + (2\,k + q - 4)\,H + \left(k^2 - k - 2\sum_{l=0}^{r-1} q^l\right) = 0 \tag{2}$$

che ha due radici intere positive, H_1 *e* H_2.

Per $q = 2$, la (1) porta unicamente a $r = 3$ e $k = 5$, [2] e [8].

Per $q > 2$ risulta, [8], § 4, $k = 2 + cq^2$ (con $c > 0$) che, sostituita nella (1), dà

$$c^2\,q^2\,(q - 1) + c\,(3\,q - 1) - 2\sum_{l=0}^{r-2} q^l = 0 \tag{3}$$

da cui segue:

$$c = \frac{1 - 3\,q + \sqrt{8\,q^{r+1} + q^2 - 6\,q + 1}}{2\,q^2\,(q - 1)} \tag{4}$$

e

$$c + 2 \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ p. \tag{5}$$

Dalla (2), sostituendo k in funzione di c, risulta

$$|H_1 - H_2| = \frac{\sqrt{(2\,k + q - 4)^2 - 4\,q\left(k^2 - k - 2\sum_{l=0}^{r-1} q^l\right)}}{q} =$$

$$= \sqrt{4\,c^2\,q^2 - 4\,c^2\,q^3 - 8\,cq + 1 + 8\sum_{l=0}^{r-2} q^l}$$

che, per la (3), dà:

$$|H_1 - H_2| = \sqrt{4\,c\,(q - 1) + 1}\,.$$

Tale differenza risulta, cfr. Prop. II di [11], uguale alla caratteristica p del campo elevata ad un certo esponente $m > 0$, ossia:

$$\sqrt{4\,c\,(q - 1) + 1} = p^m$$

da cui

$$c\,(p^h - 1) = \frac{p^{2m} - 1}{4}\,. \tag{6}$$

Tenuto conto della (5), la (6), valutata mod p, conduce a

$$9 \equiv 0 \qquad \text{mod } p$$

da cui si trae subito:

$$p = 3. \tag{7}$$

Dalla (4) risulta

$$\sqrt{8\,q^{r+1} + q^2 - 6\,q + 1} = 2\,c\,(q-1)\,q^2 + 3\,q - 1$$

dalla quale, tenuto conto della (6) e della (7), otteniamo:

$$8\,(3^{h(r-1)} - 1) = \frac{3^{2h}\,(3^{2m} - 1)^2}{4} + (3^{2m} - 1)\,(3^{h+1} - 1). \tag{8}$$

Dalla precedente relazione (8) discende che

$$(3^{2m} - 1)^2 \equiv 0 \qquad \text{mod } 4$$

e quindi

$$3^{2m} - 1 = 2\,x\,,$$

con x intero e positivo; per cui la (8) diviene

$$8 \cdot 3^{h(r-1)} = 3^{2h}\,x^2 + 2\,x\,3^{h+1} + 8 - 2\,x = 3^{2h}\,x^2 + 2\,x\,3^{h+1} + 9 - 3^{2m} \tag{9}$$

da cui, dividendo per 3^2, si ottiene:

$$8 \cdot 3^{h(r-1)-2} = x^2\,3^{2(h-1)} + 2\,x\,3^{h-1} - 3^{2(m-1)} + 1. \tag{10}$$

Tenuto conto che per $h = 1$ risulta unicamente $r = 4$ e $k = 11$, ved. [2] e [8], è lecito supporre $h > 1$. In tale ipotesi gli esponenti che compaiono nella (10) sono strettamente positivi; infatti

$$h\,(r-1) - 2 \geq 2\,(r-2) > 0 \quad \text{per} \quad r > 2 \quad \text{e} \quad m \geq 2$$

risultando per $m = 1$, dalle (6) e dalle (7),

$$c\,(3^h - 1) = 2,$$

relazione quest'ultima compatibile soltanto con il valore già escluso $h = 1$.

La relazione (10) valutata mod 3 conduce cosi, per $h > 1$, all'assurdo

$$1 \equiv 0 \qquad \text{mod } 3.$$

Possiamo dunque enunciare la seguente Proposizione:

I. *Ogni* $K^3_{r,q}$, *non contenuta in una calotta di specie 2, è proiettivamente equivalente o alla* $5^3_{3,2}$ *o alla* $11^3_{4,3}$ *costruite in* [8].

BIBLIOGRAFIA

[1] E. FAUQUEMBERGUE (1894) – *Questione 864*, «Mathesis», *4*, 169–170.

[2] A. MAKOWSKI (1963) – *Remarks on a paper of Tallini*, «Acta Arith.», *8*, 469–470.

[3] B. SEGRE (1958) – *On Galois geometries*, «Proc. of Internat. Congress of Math.», *3*, 488–499.

[4] B. SEGRE (1959) – *Le geometrie di Galois*, «Ann. di Mat.», (4), *48*, 1–97.

[5] B. SEGRE (1959) – *On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two*, «Acta Arith.», *5*, 315–332.

[6] B. SEGRE (1961) – *Lectures on Modern Geometry*, Ed. Cremonese, Roma.

[7] G. TALLINI (1956) – *Sulle k-calotte di uno spazio lineare finito*, «Ann. di Mat.», (4) *42*, 119–164.

[8] G. TALLINI (1961) – *On caps of kind s in a Galois r-dimensional space*, «Acta Arith.», *7*, 19–28.

[9] G. TALLINI (1973) – *Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space*, Atti Convegno Teorie Combinatorie, «Acc. Naz. Lincei», 1–13.

[10] G. TALLINI (1973) – *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Relaz. n. 30, «Ist. Mat. Univ. Napoli», 1–30.

[11] M. TALLINI SCAFATI (1976) – *Sui k-insiemi di uno spazio di Galois* $S_{q,r}$ *a due soli caratteri nella dimensione d*, «Rend. Acc. Naz. Lincei».