Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesca Rolandi, Anna Zaretti

Un principio di massimo per la soluzione di un'equazione ellittica omogenea non lineare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.6, p. 756–759.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_6_756_0>

Analisi matematica. — *Un principio di massimo per la soluzione di un'equazione ellittica omogenea non lineare.* Nota I di FRANCESCA ROLANDI e ANNA ZARETTI (*), presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

SUMMARY. — An existence and uniqueness theorem in the three-dimensional case for the solution a.e. of a Dirichlet problem relative to a non linear elliptic equation and a maximum principle for such a solution are proved.

An auxiliary theorem concerning a variational inequality associated to the equation considered is also stated.

1. In questa Nota si considera per un'equazione ellittica omogenea non lineare un problema di Dirichlet non omogeneo. Si dimostra, sfruttando la teoria delle disequazioni variazionali ellittiche, un teorema di esistenza e unicità e un principio di massimo per la soluzione del problema considerato.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^3$ e Γ la sua frontiera che si supporrà di classe C^2.

Sia A l'operatore così definito:

$$\mathrm{A}u = -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0 u$$

$$a_{ij} = a_{ji}\,,\ a_0 \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}) \quad , \quad a_0(x) \geq 0 \quad \text{q.o. in } \Omega$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq \alpha\,|\,\xi_i\,|^2 \quad (\alpha > 0)\,, \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}^3. \tag{1.1}$$

Sia inoltre:

$$a(u\,,v) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega a_0(x)\,uv\,dx$$

la forma associata all'operatore A. La (1.1) implica ovviamente la condizione:

$$a(u\,,u) \geq \alpha\,\|\,u\,\|_{\mathrm{H}^1}^2 \qquad \forall u \in \mathrm{H}_0^1\,. \tag{1.2}$$

Posto inoltre:

$$\mathrm{N}(\Omega) = \{u \mid u \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,,\, \mathrm{A}u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\}$$

$$\mathrm{N}_0(\Omega) = \{u \mid u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\,,\, \mathrm{A}u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\}\,,$$

(*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività di ricerca del G.N.A.F.A.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1976.

$N(\Omega)$ e $N_0(\Omega)$ risultano essere spazi di Hilbert se si pone:

$$(u, v)_{N(\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)} + (Au, Av)_{L^2(\Omega)}$$

e si munisce $N_0(\Omega)$ della topologia indotta da $N(\Omega)$.

Si ha poi ovviamente:

$$(Au, v)_{L^2(\Omega)} = a(u, v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Si consideri ora l'equazione non lineare omogenea:

$$Au + u\,|u| = 0 \tag{1.3}$$

cui si associa la seguente condizione al contorno:

$$u(x) = \varphi(x) \qquad (x \in \Gamma) \tag{1.4}$$

ove $\varphi(x) \in H^2(\Omega)$ è una funzione assegnata. *Si dirà che u è una soluzione del Problema* (1.3) (1.4) *se*:

i) $u - \varphi \in N_0(\Omega)$;

ii) *u soddisfa la* (1.3) q.o. in Ω.

Valgono i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. *Se* $\varphi \in H^2(\Omega)$ *esiste una ed una sola soluzione del problema* (1.3), (1.4).

TEOREMA 2. *Se u è la soluzione del Problema* (1.3), (1.4), *allora u soddisfa il seguente principio di massimo*:

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{x \in \Gamma} |\varphi(x)| = M \text{ [1]}$$

nelle stesse ipotesi del Teorema 1.

2. Per dimostrare i Teoremi 1 e 2 si considera, in un primo tempo, un problema relativo ad una disequazione associata alla (1.3).

Occorre perciò premettere alcuni risultati riguardanti tale disequazione.

Sia K l'insieme chiuso convesso di $L^2(\Omega)$ così definito:

$$K = \{w / w \in L^2(\Omega),\ |w| \leq M\}$$

e si consideri il seguente problema: cercare una u che soddisfa la disequazione:

$$(Au + u\,|u|, h - u)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \qquad \forall h \in K \tag{2.1}$$

(1) Si osservi che, per le ipotesi fatte, φ è dotata di massimo per $x \in \Gamma$.

e tale che:

$$u \in K \quad , \quad u - \varphi \in N_0(\Omega). \tag{2.2}$$

Vale il seguente Teorema, che verrà dimostrato nel § 3:

TEOREMA 3. *Nella ipotesi del Teorema 1, esiste una ed una sola soluzione del Problema* (2.1), (2.2).

Sfruttando il Teorema 3 si possono ora dimostrare i Teoremi 1 e 2 precedentemente enunciati. Infatti, per dimostrare il Teorema 1, basta far vedere che u, soluzione del Problema (2.1), (2.2), soddisfa q.o. in Ω anche la (1.3); il Teorema 2 segue poi immediatamente dalla prima delle (2.2). Posto:

$$\Omega' = \{x \in \Omega\,,\ |u(x)| = M\} \quad , \quad \Omega'' = \Omega - \Omega'$$

si osservi che Ω'' è un insieme aperto e quindi (come è noto dalla teoria delle disequazioni variazionali) se u è soluzione del Problema (2.1), (2.2) allora u soddisfa l'equazione:

$$Au + u\,|u| = 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega''. \tag{2.3}$$

Ponendo ora $h = 0$ nella (2.1) e tenendo conto della (2.3) si ha:

$$(Au + u\,|u|\,, u)_{L^2(\Omega')} \leq 0\,. \tag{2.4}$$

Si osservi, d'altra parte, che la funzione $|u|$ è massima in Ω' per cui risulta:

$$(Au + u\,|u|\,, u)_{L^2(\Omega')} \geq 0\,. \tag{2.5}$$

Infatti posto:

$$\Omega'_+ = \{x \in \Omega'\,, u(x) = M\}$$
$$\Omega'_- = \{x \in \Omega'\,, u(x) = -M\}$$

si ha:

$$(Au\,, u)_{L^2(\Omega')} = \int_{\Omega'} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) u\,d\Omega' + \int_{\Omega'} a_0(x)\, u^2\, d\Omega' \geq$$
$$\geq \int_{\Omega'} - \sum_{i,j=1}^{3} \left\{\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,u + a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\,u\right\} d\Omega' =$$
$$= M \int_{\Omega'_-} \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\,d\Omega' - M \int_{\Omega'_+} \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\,d\Omega\,.$$

Ricordando la (1.1) e che la forma quadratica:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \lambda_i\,\lambda_j \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

è semidefinita positiva (negativa) in tutti i punti di Ω'_{-} (Ω'_{+}), risulta per il lemma di Moutard (cfr. [1]):

$$(\mathrm{A}u\,,\,u)_{\mathrm{L}^2(\Omega')} \geq 0.$$

Dalle (2.4), (2.5) si deduce che:

$$(2.6) \qquad (\mathrm{A}u + u\,|\,u\,|\,,\,u)_{\mathrm{L}^2(\Omega')} = 0\,.$$

Ricordando le (2.3), (2.6), dalla (2.1) segue allora che:

$$(2.7) \qquad (\mathrm{A}u + u\,|\,u\,|\,,\,h)_{\mathrm{L}^2(\Omega')} \geq 0$$

$\forall h$ restrizione ad Ω' di una funzione di K.

Cambiando h in $-h$ nella (2.7) si ottiene:

$$(2.8) \qquad (\mathrm{A}u + u\,|\,u\,|\,,\,h)_{\mathrm{L}^2(\Omega')} = 0$$

$\forall h$ restrizione ad Ω' di una funzione di K e quindi anche $\forall h$ restrizione ad Ω' di una funzione di $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Sommando le (2.3), (2.8) si conclude allora che u è soluzione q.o. in Ω della (1.3). I Teoremi 1 e 2 sono cosi dimostrati.

BIBLIOGRAFIA

[1] TH. MOUTARD (1894) – *Notes sur les équations aux dérivées partielles*, «J. Éc. Polyt.», *64*.