Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria-Rosaria Tricarico

Su un problema al contorno per un'equazióne ellittico-parabolica di ordine 2 m

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.4, p. 400–404.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_4_400_0>

Equazioni a derivate parziali. — *Su un problema al contorno per un'equazione ellittico-parabolica di ordine $2m$.* Nota di MARIA-ROSARIA TRICARICO (*), presentata (**) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — In this Note a boundary value problem for a $2m$-order elliptic-parabolic equation is presented. A theorem of existence and uniqueness is given in a particular case, for a 4^{th}-order elliptic-parabolic equation.

In un lavoro di prossima pubblicazione [1], A. Canfora ha studiato un problema al contorno per un'equazione ellittico–parabolica in un dominio limitato $G \subset R^{n+1}$; un esempio, per un'equazione ellittico–parabolica del quarto ordine, è dato in [2].

Il dominio G preso in considerazione risulta unione di un cilindro

$$T = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\} \times [0, 1]$$

e di un rimanente dominio G_0 tale che riesca:

$$\forall (x, t) \in G_0, t \geq 1 \quad ; \quad G_0 \cap T = \left\{ (x, t) : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1, t = 1 \right\} \equiv \Sigma_1 .$$

Dunque, la base inferiore $\Sigma_0 = \left\{ (x, t) : \sum_{i=j}^{n} x_i^2 \leq 1, t = 0 \right\}$ del cilindro risulta contenuta in $\Gamma = \partial G$; la restante parte di frontiera: $\Gamma_0 = \Gamma - \Sigma_0$ viene supposta di classe C^∞.

In un siffatto dominio, si assegna un operatore del tipo:

$$A = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x, t) D_x^\beta \cdot) + (-1)^m D_t^m (a(x, t) D_t^m \cdot) + q D_t^{2m-1}$$

verificante le ipotesi:

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} a_{\alpha\beta}(x, t) \xi^\alpha \xi^\beta \geq a_0 |\xi|^{2m} & \forall \xi \in \mathbf{R}^n ; q(-1)^m > 0 \\ a(x, t) \equiv 0 \quad \text{in } T ; \quad a_{1\alpha}(t-1)^{2m+\theta-k} \leq D_x^a D_t^k a(x, t) \leq a'_{1\alpha}(t-1)^{2m+\theta-k} & \forall t > 1 \end{cases}$$

con: $a_{10} > 0$, $a_0 > 0$, $\theta > 0$.

Il problema al contorno considerato in [1] è il seguente:

$$\begin{cases} Au + \lambda u = f & \text{in } \mathring{G} \text{ con } f \in L^2(G) \\ D_\nu^k u_{|\Gamma_0} = 0 & \text{per } k = 0, 1, \cdots, m-1 \\ D_t^k u_{|\Sigma_0} = 0 & \text{per } k = 0, 1, \cdots, m-2 . \end{cases}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.
(**) Nella seduta del 10 aprile 1976.

Per tale problema, se λ è « abbastanza grande », si prova un teorema di esistenza e unicità nello spazio funzionale:

$$\mathcal{H}(G) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(G) : \begin{array}{lll} D_x^\alpha u\,,\, D_t^{2m-1} u\,,\, a D_t^{2m} u \in L^2(G) & \text{per} & |\alpha| \leq 2m \\ D_\nu^k u_{|\Gamma_0} = D_t^h u_{|\Sigma_0} = 0 & \text{per} & k = 0, 1, \cdots, m-1 \\ & \text{e} & h = 0, 1, \cdots, m-2 \end{array} \right\}$$

In questa Nota mi propongo di presentare un problema che generalizza il problema considerato da A. Canfora, andando a prendere in esame un dominio limitato $G \subset R^{n+1}$ che contenga più cilindri, nei quali un operatore ellittico–parabolico L degeneri in vario modo.

Detto $x' = (x_1, \cdots, x_{n+1})$ il generico punto di G, siano, dunque, per $k \in \{1, \cdots, n+1\}$, $s \in \{2, \cdots, m\}$ e $h \in \{1, 2\}$ con $\eta > 0$:

$$H_{sh}^k = \left\{ x' \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{i \neq k} (x_i - c_i^{ksh})^2 \leq r_{ksh}^2 \,,\, a_{sh}^k \leq x_k \leq b_{sh}^k + \eta \right\}$$

$$H_k^{sh} = \left\{ x' \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{i \neq k} (x_i - c_i^{ksh})^2 \leq r_{ksh}^2 \,,\, a_k^{sh} - \eta \leq x_k \leq b_k^{sh} \right\}$$

i cilindri contenuti in G. L'ufficio degli indici k, s, h verrà chiarito tra breve. Non si esclude che alcuni dei cilindri H_{sh}^k e H_k^{sh} possano essere vuoti; per i cilindri H_{sh}^k ed H_k^{sh} non vuoti si supporrà: $a_{sh}^k < b_{sh}^k$ e $a_k^{sh} < b_k^{sh}$ e si porrà:

$$T_{sh}^k = \{x' \in H_{sh}^k : a_{sh}^k \leq x_k \leq b_{sh}^k\}$$
$$T_k^{sh} = \{x' \in H_k^{sh} : a_k^{sh} \leq x_k \leq b_k^{sh}\}.$$

Detta $\Gamma = \partial G$ la frontiera di G, dette Γ_{sh}^k e Γ_k^{sh} le superfici laterali di H_{sh}^k e H_k^{sh} rispettivamente e indicate con:

$$A_{sh}^k = \{x' \in H_{sh}^k : x_k = a_{sh}^k\} \quad ; \quad B_{sh}^k = \{x' \in H_{sh}^k : x_k = b_{sh}^k + \eta\}$$
$$A_k^{sh} = \{x' \in H_k^{sh} : x_k = a_k^{sh} - \eta\} \quad ; \quad B_k^{sh} = \{x' \in H_k^{sh} : x_k = b_k^{sh}\}$$

le basi dei cilindri, supponiamo che risulti:

$$\Gamma \supset \bigcup_{k,s,h} (\Gamma_k^{sh} \cup \Gamma_{sh}^k \cup A_{sh}^k \cup B_k^{sh})$$

e inoltre:

$$\bigcup_{k,s,h} (\mathring{B}_{sh}^k \cup \mathring{A}_k^{sh}) \subset \mathring{G}.$$

Ancora, supporremo che la porzione di frontiera $\Gamma_0 = \Gamma - \cup A_{sh}^k - \cup B_k^{sh}$ sia « abbastanza regolare ».

In tale dominio G assegnamo un operatore differenziale di ordine $2m$:

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x')\, D_{x'}^\alpha$$

a coefficienti $a_\alpha(x') \in C^{|\alpha|}(\overline{G})$, verificante le seguenti ipotesi:

(A) L è uniformemente ellittico in ogni dominio $K \subset G - \bigcup_{k,s,h} (T_{sh}^k \cup T_k^{sh})$.

(B) Nei cilindri $H_{sh}^k \cup H_k^{sh}$, con $h = 1, 2$, indicando con t la variabile x_k e con x il resto delle variabili $(x_1, \cdots, x_{n+1})$, L assume la forma:

$$L = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}^{ks}(x') D_x^\beta \cdot) + (-1)^m D_t^m (a^{ks}(x') D_t^m \cdot) +$$
$$+ q_0^{ks} D_t^{2s-1} + p_0^{ks} D_t^{2s-2} + \sum_{l=1}^{s-1} (q_l^{ks} D_t^{2s-2l-1} + p_l^{ks} D_t^{2s-2l-2} \cdot)$$

con $q_0^{ks} = 0$ in $H_{s2}^k \cup H_k^{s2}$ e $q_0^{ks} \neq 0$ in $H_{s1}^h \cup H_k^{s1}$.

(b_1) Nei suddetti cilindri i coefficienti $a^{ks}(x, t)$ verificano le relazioni:

$$a^{ks}(x') \equiv 0 \qquad \text{in} \quad T_{s1}^k \cup T_k^{s1} \cup T_{s2}^k \cup T_k^{s2}$$

$\forall x' \in H_{sh}^k - T_{sh}^k$:

$$\omega_\gamma (t - b_{sh}^k)^{2m+\theta-k} \le D_s^\gamma D_t^l a^{ks}(x') \le \omega_\gamma' (t - b_{sh}^k)^{2m+\theta-l}$$

con $h = 1, 2, \omega_0 > 0, \theta > 0$
$\forall x' \in H_k^{sh} - T_k^{sh}$:

$$\omega_\gamma (a_k^{sh} - t)^{2m+\theta-l} \le D_x^\gamma D_t^l a^{ks}(x') \le \omega_\gamma' (a_k^{sh} - t)^{2m+\theta-}$$

con $h = 1, 2, \omega_0 > 0, \theta > 0$.

(b_2) In tutti i cilindri i coefficienti p_l^{ks} sono costanti di segno qualunque per $l \ge 1$; mentre risulta:

$$p_0^{ks} (-1)^{s-1} > 0 \qquad \text{in tutti i cilindri.}$$

I coefficienti q_l^{ks} sono costanti di segno qualunque, e risulta:

$$q_0^{ks} = 0 \qquad \text{in} \quad H_{s2}^k \cup H_k^{s2}, \; q_0^{ks} \neq 0 \qquad \text{in} \quad H_{s1}^k \cup H_k^{s1}.$$

(b_3) I coefficienti $a_{\alpha\beta}^{ks}(x, t)$ sono di classe C^∞ in un intorno dei pezzi di frontiera A_{sh}^k e B_k^{sh}, ed inoltre si ha:

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}^{ks}(x') \xi^\alpha \xi^\beta \ge a_0 |\xi|^{2m} & \forall \xi \in \mathbf{R}^n \\ a_{\alpha\beta}^{ks}(x') = a_{\beta\alpha}^{ks}(x') & \forall \alpha, \forall \beta \\ D_t a_{\alpha\beta}^{ks} \equiv 0 & \text{in un intorno di } A_{sh}^k \text{ e di } B_k^{sh}. \end{cases}$$

Per l'operatore L, ora descritto, poniamo formalmente il problema:

$$(1)\quad \begin{cases} Lu + \lambda u = f \quad \text{in} \quad G \qquad (\lambda > 0) \\ D_\nu^l \, u_{|\Gamma_0} = 0 \quad \text{per } l = 0, 1, \cdots, m-1 \\ D_{x_k}^l \, u_{|A_{sh}^k} = 0 \quad \text{per } l = 0, 1, \cdots, s-h-\gamma_s(2-h) \\ D_{x_k}^l \, u_{|B_k^{sh}} = 0 \quad \text{per } l = 0, 1, \cdots, s-h-(1-\gamma_s)(2-h) \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1, \cdots, n+1 \\ s = 2, \cdots, m \\ h = 1, 2 \end{cases}$$

dove si è posto:

$$\gamma_s = \begin{cases} 1 & \text{se } q_0^{ks}(-1)^s > 0 \\ 0 & \text{se } q_0^{ks}(-1)^s \leq 0 . \end{cases}$$

Introdotte le funzioni: per $k = 1, 2, \cdots, n+1$

$$d_k(x') = \begin{cases} \min\limits_{s,h} \{\text{dist}(x', T_{sh}^k), \text{dist}(x', T_k^{sh})\} \\ 1 \qquad \text{se} \quad \bigcup\limits_{s,h} (H_{sh}^k \cup H_k^{sh}) = \varnothing \end{cases}$$

consideriamo lo spazio:

$$\mathcal{K}(G) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathring{G}) : \begin{array}{l} u \in L^2(G), \, d_k^{2m+\theta} D_{x_k}^{2m} u \in L^2(G) \quad \text{per} \quad k = 1, 2, \cdots, n+1 \\ D_{x_k}^{2s-1} u \in L^2(H_{s1}^k \cup H_k^{s1}), \, D_{x_k}^{2s-2} u \in L^2(H_{s2}^k \cup H_k^{s2}) \\ \text{per} \quad k = 1, 2, \cdots, n+1 \quad \text{e} \quad s = 2, \cdots, m \end{array} \right\}$$

ed in esso introduciamo la norma:

$$\|u\|_G^2 = \|u\|_{L^2(G)}^2 + \sum_{k=1}^{n+1} \| d_k^{2m+\theta} D_{x_k}^{2m} u \|_{L^2(G)}^2 + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{s=2}^{m} \| D_{x_k}^{2s-1} u \|_{L^2(H_{s1}^k \cup H_k^{s1})}^2 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{s=2}^{m} \| D_{x_k}^{2s-2} u \|_{L^2(H_{s2}^k \cup H_k^{s2})}^2 .$$

In tal modo $\mathcal{K}(G)$ viene strutturato come spazio di Sobolev con peso.

Il sottospazio di $\mathcal{K}(G)$ definito da:

$$\mathcal{H}(G) = \left\{ u \in \mathcal{K}(G) : \begin{array}{ll} D_\nu^l \, u_{|\Gamma_0} = 0 & l = 0, 1, \cdots, m-1 \\ D_{x_k}^l \, u_{|A_{sh}^k} = 0 & l = 0, 1, \cdots, s-h-\gamma_s(2-h) \\ D_{x_k}^l \, u_{|B_k^{sh}} = 0 & l = 0, 1, \cdots, s-h-(1-\gamma_s)(2-h) \end{array} \begin{cases} k = 1, \cdots, n+1 \\ s = 2, \cdots, m \\ h = 1, 2 \end{cases} \right\}$$

appare come l'ambiente « naturale » in cui risolvere il problema (1). In effetti, si può provare un teorema di esistenza e unicità per il problema (1). Ci limiteremo ad enunciarlo riferendoci ad un caso particolare: quello in cui è: $m = 2$ e, inoltre, l'unico cilindro non vuoto contenuto in G è dato da:

$$H = H_{22}^{n+1} \equiv \left\{ (x, t) \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1, \, 0 \leq t \leq 1 + \eta \right\} .$$

In questo caso l'operatore L si scrive semplicemente:

$$L = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 2} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x, t) D_x^\beta \cdot) + D_t^2 (a(x, t) D_t^2 \cdot) - p D_t^2$$

ed il problema (1) si presenta nella forma:

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f & \text{in } \overset{\circ}{G} \\ D_\nu u_{|\Gamma_0} = 0 \\ u_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

dove $\Gamma = \partial G$, $\Gamma_0 = \Gamma - A_{22}^{n+1}$, ed $A_{22}^{n+1} = \{x' \in H : t = 0\}$ non è altro che la base inferiore del cilindro H

Lo spazio funzionale $\mathcal{H}(G)$ si riduce a:

$$\mathcal{H}(G) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(G) : \begin{array}{ll} D_x^\alpha u, D_t^2 u, d^{4+\theta} D_t^4 u \in L^2(G) & \text{per } |\alpha| \leq 4 \\ D_\nu u_{|\Gamma_0} = u_{|\Gamma} = 0 & \end{array} \right\}$$

dove $d(x')$ è la distanza di x' da $T = \{x' \in H : 0 \leq t \leq 1\}$. Sussiste il seguente:

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ. *Se l'operatore* L *verifica in* G *le ipotesi* (A) *e* (B) *e se è* $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ (*con* λ_0 « *abbastanza* » *grande*), *allora, per ogni* $f \in L^2(G)$ *il problema* (2) *ammette una ed una sola soluzione* $u \in \mathcal{H}(G)$. *Per tale* $u \in \mathcal{H}(G)$ *si ha inoltre*:

$$\| u \|_{\mathcal{H}(G)} \leq c \| f \|_{L^2(G)}$$

con c *indipendente da* f.

La dimostrazione del teorema è divisa, in sostanza, in tre fasi distinte: la prima, in cui si dimostra l'unicità di una eventuale soluzione $u \in \mathcal{H}(G)$; la seconda, in cui si dimostra l'esistenza di una soluzione debole del problema e, cioè, di una $u \in L^2(G)$ verificante l'equazione:

$$\int_G u L^*(v) \, dx \, dt = \int_G f v \, dx \, dt \qquad \forall v \in \mathcal{H}(G) \tag{3}$$

ed infine, una terza fase, in cui si fa vedere che ogni u che verifichi la (3), in realtà, appartiene ad $\mathcal{H}(G)$. La terza fase è senz'altro la più delicata, e richiede l'utilizzazione di alcune tecniche tipiche della teoria degli spazi di Sobolev con peso (cfr. M. Troisi [3]).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. CANFORA – *Esistenza e unicità delle soluzioni di un problema al contorno relativo ad un'equazione ellittico-parabolica di ordine* $2m$ (in corso di stampa su « Ricerche di Matematica »).

[2] A. CANFORA – *Esistenza e unicità delle soluzioni di un problema al contorno relativo ad un'equazione ellittico-parabolica* (in corso di stampa su « Rend. Acc. Naz. Lincei »).

[3] M. TROISI (1969) – *Teoremi di inclusione negli spazi di Sobolev con peso*, « Ricerche di Matematica », *18*, 49–74.