ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

EMMA PREVIATO

Sui sottogruppi di Dedekind nei gruppi infiniti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.4, p. 388–394.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_4_388_0>

Teoria dei gruppi. — *Sui sottogruppi di Dedekind nei gruppi infiniti.* Nota di EMMA PREVIATO, presentata [*] dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

ZUSAMMENFASSUNG. — Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Es wird eine hinreichende Bedingung, damit H eine modulare Untergruppe von G sei, angegeben.

Dati i gruppi H, G, diremo che la coppia (H, G) è una $\mathscr{X}$–coppia se e solo se $\mathrm{H} \leq \mathrm{G}$ e, per ogni intervallo $[\mathrm{T}/\mathrm{S}]$ di lunghezza 1 del reticolo $[\mathrm{G}/\mathrm{H}]$, da $\mathrm{S} \underset{d}{\leq} \mathrm{T}$ (sottogruppo di Dedekind) segue che l'indice $|\mathrm{T} : \mathrm{S}|$ è finito.

Scopo del presente lavoro [1] è dimostrare il seguente Teorema:

Sia (H, G) *una* $\mathscr{X}$*–coppia; il sottogruppo* H *è di Dedekind in* G *se e solo se* $\mathrm{H} \underset{d}{\leq} \langle \mathrm{H}, x \rangle$ *per ogni* $x \in \mathrm{G}$.

Questa caratterizzazione è stata ottenuta in [2] nel caso dei gruppi finiti.

Le notazioni saranno quelle usuali nella teoria dei gruppi; ricordiamo che un sottogruppo H di un gruppo G si dice un sottogruppo di Dedekind (in G) se e solo se per ogni $\mathrm{K} \leq \mathrm{G}$ la mappa $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X} \cap \mathrm{K}$ è un isomorfismo del reticolo $[\mathrm{H} \cup \mathrm{K}/\mathrm{H}]$ sul reticolo $[\mathrm{K}/\mathrm{H} \cap \mathrm{K}]$. In accordo con quanto introdotto in [2], diremo che un $\mathrm{H} \leq \mathrm{G}$ ha la proprietà $(*)$ se e solo se $\mathrm{H} \underset{d}{\leq} \langle \mathrm{H}, x \rangle$ per ogni $x \in \mathrm{G}$.

1. PROPOSIZIONE 1. *Data una* $\mathscr{X}$*–coppia* (H, G) *se* H *ha la proprietà* $(*)$ *e se esiste un elemento* x *di* G *tale che* $[\langle \mathrm{H}, x \rangle/\mathrm{H}]$ *sia un reticolo infinito, allora* $\mathrm{H} \underset{q}{\leq} \mathrm{G}$ (H *è un sottogruppo quasinormale di* G).

Tale risultato è stato provato da Stonehewer per un sottogruppo di Dedekind in G ([5], Theorem 2.1 e Theorem A), ma la sua dimostrazione si adatta tale e quale ad un sottogruppo con la proprietà $(*)$.

Ci occupiamo ora del caso in cui $[\langle \mathrm{H}, x \rangle/\mathrm{H}]$ è un reticolo finito per ogni $x \in \mathrm{G}$.

LEMMA 1. *Data una* $\mathscr{X}$*–coppia* (H, G), *se* H *ha la proprietà* $(*)$ *e se il reticolo* $[\langle \mathrm{H}, x \rangle/\mathrm{H}]$ *è finito per ogni* $x \in \mathrm{G}$, *allora per ogni* $g \in \mathrm{G}$ *tale che* $|\langle \mathrm{H}, g \rangle : \mathrm{H}|$ *è potenza di primo anche* $\mathrm{H} \cup \mathrm{H}^g$ *gode della proprietà* $(*)$.

Dimostrazione. Essendo (H, G) una $\mathscr{X}$–coppia, l'indice $|\langle \mathrm{H}, x \rangle : \mathrm{H}|$ è finito per ogni $x \in \mathrm{G}$, e tale fatto sussiste anche se ad H sostituiamo un suo

(*) Nella seduta del 10 aprile 1976.

(1) Eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

coniugato. Siano anzitutto g_1 e g_2 elementi di G tali che $|\langle H, g_i\rangle : H|$ sia potenza di primo e tali che H permuti con $\langle g_i\rangle$ $(i = 1, 2)$. Proveremo che $\langle g_2\rangle$ permuta con $H \cup H_1$, ove H_1 è un qualunque coniugato di H in $\langle H, g_1\rangle$; a tale scopo, distinguiamo due casi. *I caso*: $H \underset{p}{\not\leq} \langle H, g_1\rangle$. Sarà $|\langle H, g_1\rangle :$ $: H| = p$, $|H/N| = q$, ove $N = H_{\langle H, g_1\rangle}$, con $p > q$, infatti $H\langle g_1\rangle$ ha la Schmidt–struttura relativa ad H [2]. Premettiamo un'osservazione: se H risulta di indice finito in $\langle H, g_1, g_2\rangle$, e dunque $H \underset{d}{\leq} \langle H, g_1, g_2\rangle$, possiamo considerare il gruppo finito $T = \langle H, g_1, g_2\rangle/K$ ove $K = H_{\langle H, g_1, g_2\rangle} \leq H \cap H_1$; è $T = P_1 \times \cdots \times P_r \times L$, con $H/K = Q_1 \times \cdots \times Q_r \times L_1$ (Schmidt–struttura), e dunque si avrà $H\langle g_1\rangle/K = P_i(H/K)$; essendo H permutabile con $\langle g_2\rangle$ allora $\langle g_2\rangle K/K$ permuta con $H\langle g_1\rangle/K$, e dunque $\langle g_2\rangle$ con $H\langle g_1\rangle$. Ora, non è restrittivo assumere anche $|\langle H_1, g_2\rangle : H_1|$ potenza di primo; infatti $g_2^{r^n} \in H$ per un primo r, e supponendo $g_2^{r^n} \notin N = H \cap H_1$ si ha $\langle H_1, g_2\rangle = \langle H_1, H, g_2\rangle =$ $= \langle H, g_1, g_2\rangle$; ma allora H ha indice finito in $\langle H, g_1, g_2\rangle$ e in questo caso la conclusione è già stata raggiunta nell'osservazione. Sia dunque $g_2^{r^n} \in H$, e di conseguenza $[\langle H_1, g_2\rangle/H_1]$ una catena. Se la catena $[\langle H, g_2\rangle/H]$ ha lunghezza ≥ 2, la conclusione è facile; infatti se la catena $[\langle H_1, g_2\rangle : H_1]$ ha anch'essa lunghezza ≥ 2 allora H_1 e $\langle g_2\rangle$ permutano ([4], main theorem). Diversamente, risulta $g_2^s \in H_1$ per un opportuno primo s, ed essendo $g_2^s \notin H$ si ha $\langle H, g_2\rangle = \langle H, g_1, g_2\rangle$, e si conclude per l'osservazione. Assumiamo dunque

(1) $|\langle H, g_2\rangle : H| = r$, numero primo.

Supponiamo ora, per assurdo, che $H \cup H_1$ non permuti con $\langle g_2\rangle$; allora neanche H_1 permuta con $\langle g_2\rangle$ e risulta $|\langle H_1, g_2\rangle : H_1| = t$ (primo), $|H_1 : N_1| = s$ un primo minore di t, ove $N_1 = (H_1)_{\langle H_1, g_2\rangle}$. Consideriamo ora il sottogruppo $\langle N, g_2\rangle$, che è contenuto tanto in $\langle H_1, g_2\rangle$ quanto in $\langle H, g_2\rangle$. $\langle N, g_2\rangle$ non può coincidere con nessuno dei due gruppi menzionati, perché si avrebbe rispettivamente, $\langle H, g_2\rangle = \langle H, g_1, g_2\rangle$ o $\langle H_1, g_2\rangle = \langle H, g_1, g_2\rangle$. Pertanto $\langle N, g_2\rangle$ ha indice primo in entrambi i gruppi. Si ha $|\langle H_1, g_2\rangle : N| =$ $= |\langle H_1, g_2\rangle : H_1| \, |H_1/N| = tq$; proveremo che l'indice di $\langle N, g_2\rangle$ in $\langle H_1, g_2\rangle$ è q e a tale scopo supponiamo, per assurdo, che sia t, con $t \neq q$. Detto M il sottogruppo $N_1 \cap N$, essendo N_1 ed N normali in H_1 si avrà $|N_1 : M| =$

(2) Diremo che un gruppo G ha la Schmidt–struttura relativa ad H se: *i*) posto $H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$, risulta $G/H_G \cong (P_1 \times P_2 \times \cdots) \times K$, ove P_i è un P–gruppo non abeliano generalizzato ([6], p. 22); *ii*) P_i e P_j sono coprimi per $i \neq j$, P_i e K sono coprimi per ogni i (diciamo che due gruppi periodici S e T sono coprimi se ogni elemento di S ha ordine relativamente primo con quello di ogni elemento di T); *iii*) $H = (Q_1 \times Q_2 \times \cdots) \times (H \cap K)$, ove Q_i è un sottogruppo di Sylow non normale di P_i, per ogni i, e $H \cap K \underset{q}{\leq} G$.

Ogni gruppo finito G ha la Schmidt–struttura relativa ad un proprio sottogruppo di Dedekind H ([4], main theorem); d'altra parte, è chiaro che se un gruppo G ha la Schmidt struttura relativa ad un proprio sottogruppo H, allora $H \underset{d}{\leq} G$.

$= q = |\mathrm{H}_1 : \mathrm{N}|$, $|\mathrm{N} : \mathrm{M}| = s = |\mathrm{H}_1 : \mathrm{N}_1|$. Consideriamo il sottogruppo $\mathrm{L} = \mathrm{M}_{\langle \mathrm{H}_1, g_2\rangle}$, e diciamo α l'indice di L in M. Ora, poiché $\langle \mathrm{H}_1, g_2\rangle/\mathrm{L} = \mathrm{N}_1 \langle \mathrm{N}, g_2\rangle/\mathrm{L}$ (3), si avrà $|\langle \mathrm{H}_1, g_2\rangle/\mathrm{L}| = \alpha qst = |\mathrm{N}_1/\mathrm{L}|\,|\langle \mathrm{N}, g_2\rangle/\mathrm{L}|/|(\mathrm{N}_1/\mathrm{L}) \cap \cap (\langle \mathrm{N}, g_2\rangle/\mathrm{L})| = \alpha q \alpha s q/\alpha$, assurdo. Abbiamo così provato

(2) $|\langle \mathrm{N}, g_2\rangle : \mathrm{N}| = t$.

Non può essere $t = r$ perché, come si è visto, $g_2^r \in \mathrm{H}_1$, quindi se fosse $r = |\langle \mathrm{H}_1, g_2\rangle : \mathrm{H}_1|$ si avrebbe $\langle \mathrm{H}_1, g_2\rangle = \mathrm{H}_1 \langle g_2\rangle$. Poichè $|\langle \mathrm{H}, g_2\rangle : \mathrm{N}| = rq$, si ha dunque $t = q$. Se fosse $\mathrm{H} \ntriangleleft \langle \mathrm{H}, g_2\rangle$, con lo stesso ragionamento usato nel gruppo $\langle \mathrm{H}_1, g_2\rangle$ si prova che l'indice di $\langle \mathrm{N}, g_2\rangle$ in $\langle \mathrm{H}, g_2\rangle$ è q, quindi $t = r$, già escluso. Pertanto risulta

(3) $\mathrm{H} \triangleleft \langle \mathrm{H}, g_2\rangle$.

Ora avremo $|\langle \mathrm{N}, g_2\rangle : \langle \mathrm{N}, g_2\rangle \cap \mathrm{H}| = |\langle \mathrm{N}, g_2\rangle : \mathrm{N}| = \langle \mathrm{H}, g_2\rangle : \mathrm{H}| = r$ e dunque $t = r$, assurdo. *II caso*: $\mathrm{H} \underset{q}{\leq} \langle \mathrm{H}, g_1\rangle$. Distinguiamo due sottocasi. I sottocaso: $\mathrm{H} \underset{q}{\not\leq} \langle \mathrm{H}, g_2\rangle$. Per quanto visto nel I caso, $\langle \mathrm{H}, g_2\rangle$ e $\langle g_1\rangle$ sono permutabili e così H ha indice finito in $\langle \mathrm{H}, g_2\rangle \langle g_1\rangle$. Avendo $\langle \mathrm{H}, g_1, g_2\rangle$ la Schmidt–struttura relativa ad H, si ha $\langle \mathrm{H}, g_1, g_2\rangle/\mathrm{K} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{L}$, con $(\mathrm{H} \cup \mathrm{H}_1)/\mathrm{K} \cap \mathrm{L} \underset{q}{\leq} \langle \mathrm{H}, g_1, g_2\rangle/\mathrm{K}$ e $(\mathrm{H} \cup \mathrm{H}_1)/\mathrm{K} \cap \mathrm{P}_1$ permutabile con $\langle g_2\rangle \mathrm{K}/\mathrm{K}$; pertanto $\mathrm{H} \cup \mathrm{H}_1$ è permutabile con $\langle g_2\rangle$. II sottocaso: $\mathrm{H} \underset{q}{\leq} \langle \mathrm{H}, g_2\rangle$. Supponiamo per assurdo $\mathrm{H}_1 \underset{q}{\not\leq} \langle \mathrm{H}_1, g_2\rangle$; sostituendo eventualmente g_2 con una opportuna potenza, non è restrittivo assumere $|\langle \mathrm{H}_1, g_2\rangle : \mathrm{H}_1| = t$, primo: infatti $\langle \mathrm{H}_1, g_2\rangle$ ha la Schmidt–struttura relativa ad H_1. Ora H_1 fa le veci avute da H nel I sottocaso, per cui possiamo affermare che $\langle \mathrm{H}_1, g_2\rangle \langle g_1\rangle = \langle g_1\rangle \langle \mathrm{H}_1, g_2\rangle$ e dunque H_1 ha indice finito nel gruppo $\langle \mathrm{H}_1, g_1, g_2\rangle$. In tale gruppo H_1 ed H sono coniugati, ma H risulta quasinormale, poiché è di Dedekind e il gruppo è generato da H e da elementi y tali che $\mathrm{H} \underset{q}{\leq} \langle \mathrm{H}, y\rangle$ ([4], main theorem). Siamo pervenuti ad una contraddizione.

Ora consideriamo un elemento x di G e un g tale che $|\langle \mathrm{H}, g\rangle : \mathrm{H}|$ sia potenza di primo; poiché $\langle \mathrm{H}, x\rangle$ ha la Schmidt–struttura relativa ad H, possiamo scrivere $\langle \mathrm{H}, x\rangle = \mathrm{H}(\langle x_1\rangle \cdots \langle x_n\rangle \mathrm{K})$ ove $\mathrm{K} = \mathrm{H}_{\langle \mathrm{H}, x\rangle}$ in modo che risulti $|\langle \mathrm{H}, x_i\rangle : \mathrm{H}| = p_i^{r_i}$ e $\mathrm{H}\langle x_i\rangle = \langle x_i\rangle \mathrm{H}$, né è restrittivo assumere $\mathrm{H}\langle g\rangle = \langle g\rangle \mathrm{H}$, dovendo considerare il gruppo $\mathrm{H} \cup \mathrm{H}^g$. Per quanto è stato provato, $(\mathrm{H} \cup \mathrm{H}^g)\langle x_i\rangle = \langle x_i\rangle (\mathrm{H} \cup \mathrm{H}^g)$ per $i = 1, \cdots, n$; allora $(\mathrm{H} \cup \mathrm{H}^g) \langle x_1\rangle \cdots \langle x_n\rangle = \langle x_1\rangle \cdots \langle x_n\rangle (\mathrm{H} \cup \mathrm{H}^g)$, quindi H e H^g hanno indice finito in

(3) Il caso $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}$ si esclude facilmente; infatti, se fosse $|\mathrm{H}_1 : \mathrm{N}| = |\mathrm{H}_1 : \mathrm{N}_1| = |\mathrm{N}_1 \langle g_2\rangle : \mathrm{N}_1| = q$, $\mathrm{N}\langle g_2\rangle$ sarebbe coniugato di H_1 e dunque avrebbe la proprietà (*). Pertanto, $\mathrm{N}\langle g_2\rangle \underset{d}{\leq} \langle \mathrm{N}, g_2, g_1\rangle$, e massimo, essendo $g_1^p \in \mathrm{N}$. In conclusione si avrebbe $\mathrm{N}\langle g_2\rangle$. permutabile con $\langle g_1\rangle$, da cui si ricava $|\langle \mathrm{H}_1, g_2\rangle \langle g_1\rangle : \mathrm{H}_1|$ finito, assurdo per l'osservazione premessa.

$\langle H \cup H^g , x \rangle$, di conseguenza sono entrambi di Dedekind, e dunque la loro unione è di Dedekind.

OSSERVAZIONE 1. Nel corso della dimostrazione del Lemma 1, abbiamo in particolare provato il seguente fatto: sia (X , G) una $\mathcal{X}$–coppia, X goda della proprietà $(*)$ e sia $[\langle X , g \rangle / X]$ finito per ogni $g \in G$; se $| \langle X , g_i \rangle : X |$ è una potenza di primo e se X e $\langle g_i \rangle$ sono permutabili ($i = 1 , 2$), allora $X \cup X^{g_1^r}$ è permutabile con $\langle g_2 \rangle$. Mettiamo in rilievo due conseguenze di tale proprietà: se $X \not\leq_q \langle X , g_1 \rangle$, allora $\langle X , g_1 \rangle$ è generato da coniugati di X ([4], main theorem), e dunque X ha indice finito nel gruppo $\langle X , g_1 \rangle \langle g_2 \rangle$, inoltre si vede facilmente che $\langle X , g_1 \rangle$ è permutabile con ogni sottogruppo di G contenente X.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* (H, G) *una* $\mathcal{X}$*–coppia,* H *goda della proprietà* $(*)$, *e il reticolo* $[\langle H , x \rangle / H]$ *sia finito per ogni* $x \in G$. *Se* $G = \langle H , x_1 , \cdots x_t \rangle$ *(ossia se* G *è finitamente generato modulo* H*), allora* $H \leq_d H^G = \bigcup_{g \in G} H^g$ *e* $| H^G : H |$ *è finito.*

Dimostrazione. Osserviamo che se G è generato da H e da un numero finito di elementi allora è possibile scegliere tali elementi in modo che $| \langle H , x_i \rangle : H |$ sia una potenza di primo; infatti essendo $H \leq_d \langle H , x_i \rangle$ il gruppo $\langle H , x_i \rangle$ è generato da H e da opportune potenze x_i^r per cui $[\langle H , x_i^r \rangle / H]$ è una catena, e dunque $| \langle H , x_i^r \rangle : H |$ è potenza di primo ([3], Lemma 2). Assumiamo dunque $G = \langle H , x_1 , \cdots , x_t \rangle$ con $| \langle H , x_i \rangle : H |$ potenza di primo. Proviamo che H ha indice finito in H^G; la conclusione seguirà allora dal caso finito ([2]). Denotiamo con $l [\langle H , x_i \rangle / H]$ la lunghezza del reticolo $[\langle H , x_i \rangle / H]$ e usiamo induzione sul numero $n = \sum_{i=1}^{t} l [\langle H , x_i \rangle / H]$. Per $n = 1$ H è massimo in G, quindi ha indice finito essendo (H , G) una $\mathcal{X}$–coppia. Sia $n > 1$. Non è restrittivo assumere $H \ntrianglelefteq \langle H , x_1 \rangle$, e dunque $l [H \cup H^{x_1} / H] \geq 1$. Per il Lemma 1 il sottogruppo $H_1 = H \cup H^{x_1}$ gode della proprietà $(*)$, inoltre essendo $H_1 \in [G/H]$ anche (H_1 , G) è una $\mathcal{X}$–coppia; possiamo applicare ad H_1 l'ipotesi induttiva e così concludere che $| H_1^G : H_1 | = | H^G : H_1 |$ è finito, ma essendo $| H_1 : H |$ finito anche $| H^G : H |$ è finito.

Osserviamo che $x \in H^G$ non appena $H \not\leq_q \langle H , x \rangle$ (e $| \langle H , x \rangle : H |$ è potenza di primo) ([4], main theorem). Occupiamoci pertanto degli elementi x tali che $H \leq_q \langle H , x \rangle$.

LEMMA 2. *Sia* (H , G) *una* $\mathcal{X}$*–coppia e* H *goda della proprietà* $(*)$. *Se* $[\langle H , x \rangle / H]$ *è finito per ogni* $x \in G$ *e se per certi elementi* $x_1 , \cdots , x_t$ *è* $H \leq_q \langle H , x_i \rangle$, *allora è* $H \leq_q \langle H , x_1 , \cdots , x_t \rangle$.

Dimostrazione. Basterà provare che H permuta con ogni suo coniugato H^x, per ogni $x \in \langle H , x_1 , \cdots , x_t \rangle$; tale condizione è infatti sufficiente ad assicurare la quasinormalità di un sottogruppo che ha la proprietà $(*)$, in virtù del teorema di struttura di Schmidt ([4], main theorem). Si può assumere

$x = x_{i_1}^{r_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{r_{i_s}}$, ove $1 \leq i_j \leq t$; inoltre, sostituendo eventualmente a ciascun x_i sue potenze opportune possiamo assumere $|\langle H, x_i\rangle : H|$ potenza di primo. Usiamo induzione su s per provare che $H \underset{q}{\leq} H \cup H^x$, e che inoltre $H \cup H^x$ è permutabile con ogni $\langle x_i\rangle$ $(i = 1, \cdots, t)$. Per $s = 1$, l'affermazione è conseguenza dell'Osservazione 1. Sia dunque $s > 1$. Diciamo $x' = x_{i_1}^{r_{i_1}} \cdots x_{i_{s-1}}^{r_{i_{s-1}}}$ per l'ipotesi induttiva, $H \cup H^{x'}$ è permutabile con $\langle x_{i_s}\rangle$; di conseguenza H ha indice finito nel gruppo $(H \cup H^{x'})\langle x_{i_s}\rangle$. Possiamo concludere che $H \underset{d}{\leq} (H \cup H^{x'})\langle x_{i_s}\rangle$ e inoltre $H \underset{q}{\leq} (H \cup H^{x'})\langle x_{i_s}\rangle$, poiché il gruppo $(H \cup H^{x'})\langle x_{i_s}\rangle$ è generato da H e da elementi y tali che $H \underset{q}{\leq} \langle H, y\rangle$ ([4], main theorem).

La Proposizione 2 e il Lemma 2 ci permettono di ottenere la seguente proprietà

LEMMA 3. *Sia* (H, G) *una* $\mathfrak{X}$*–coppia e* H *goda della proprietà* $(*)$. *Se* G *è finitamente generato modulo* H *e se* $[\langle H, x\rangle/H]$ *è finito per ogni* $x \in G$, *allora* G/H_G *è un gruppo periodico.*

Dimostrazione. Sia $G = \langle H, x_1, \cdots, x_t\rangle$; come nella Proposizione 2, non è restrittivo supporre che $|\langle H, x_i\rangle : H|$ sia potenza di primo per $1 \leq i \leq t$; possiamo inoltre scegliere opportunamente gli x_i in modo che H e $\langle x_i\rangle$ siano permutabili ([4], main theorem), e riordinare gli indici in modo tale che risulti $H \underset{q}{\leq} \langle H, x_i\rangle$ per $i = 1, \cdots, r$ e $H \underset{q}{\nleq} \langle H, x_j\rangle$ per $j = r+1, \cdots, t$. Poiché l'ordine di un $x \in G$ relativo ad H è finito per ipotesi, per concludere basterà dimostrare che H/H_G è un gruppo periodico; a tale scopo, posto $M = H_{\langle H, x_1, \cdots, x_r\rangle}$ ed $N = H_{\langle H, x_{r+1}, \cdots, x_t\rangle}$, proviamo intanto che H/M e H/N sono periodici. La conclusione si raggiungerà facendo infine vedere che $H_G = M \cap N$. Essendo $x_j \in H^G$ per $r < j \leq t$ ([4], main theorem), la Proposizione 2 permette di concludere che H/N è finito, essendo immagine omomorfa di $H/H_{(H^G)}$. Ora, per il Lemma 2 è $H \underset{q}{\leq} K = \langle H, x_1, \cdots, x_r\rangle$, inoltre H ha indice finito in H^K (Proposizione 2). È dunque possibile trovare una catena finita $H_0 = H \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = H^K \lhd K$ tale che $H_i \underset{q}{\leq} K$ e l'indice di H_{i-1} in H_i sia potenza di un numero primo, per $i = 1, \cdots, n$ (ad esempio $H_1 = H \cup H^{x_1}$, se x_1 non normalizza H). Usiamo induzione su n per provare che $H^K/M = H^K/H_K$ ha esponente finito. La conclusione è banale se $n = 0$; sia dunque $n > 0$. Il gruppo $H^K/(H_1)_K$ ha esponente finito per l'ipotesi induttiva; consideriamo, per ogni coniugato H^x di H in K, il sottogruppo $T_x = H^x_{(H_1^x)}$. Posto $(H_1)_K = S$, risulta $T_x \cap S \lhd S$, essendo $S = \bigcap_{x \in K} H_1^x$, ed $S/T_x \cap S \cong ST_x/T_x \leq H_1^x/T_x$, un p–gruppo finito il cui ordine è limitato da un intero $\bar{m}$ che non dipende da x ([5], Lemma 3.3 (4)). Pertanto, anche

(4) Infatti, sia $|H_1 : H| = p^m$; allora $H_1^x/T_x = P$ è un p–gruppo, generato da un sottogruppo $Q = H^x/T_x$, quasinormale, e da un sottogruppo ciclico di ordine p^m, come si può vedere scegliendo in P un elemento x che non appartenga all'unico sottogruppo massimale contenente Q; risulta infatti $P = Q\langle x\rangle$ e $Q \cap \langle x\rangle \leq Q_P = \langle 1\rangle$.

$S/H_K = S/\bigcap_{x\in K}(T_x \cap S) \cong\leq \prod_x S/T_x \cap S$ ha esponente finito. Possiamo concludere che il gruppo H^K/H_K ha esponente finito, essendo estensione di un gruppo di esponente finito con un altro gruppo siffatto. Rimane da dimostrare che $M \cap N$ è normale in G. Essendo $x_j \in H^G$ per $j = r+1, \cdots, t$, H ha indice finito in $\langle H, x_{r+1}, \cdots, x_t\rangle$ (Proposizione 2), e dunque, posto $\langle H, x_{r+1}, \cdots \cdots, x_t\rangle = R$, è $H \not\leq_q \langle H, y\rangle$ per ogni $y \in R\setminus H$, poiché R ha la Schmidt–struttura relativa ad H. Risulta pertanto $R \cap K = H$ e, per l'Osservazione 1, $G = KR$. Allora, per $g \in G$, si ha $g = kr = r'k'$ con $k, k' \in K$ e $r, r' \in R$. Si ha $(M \cap N)^g = ((M \cap N)^k)^r = ((M \cap N)^{r'})^{k'} \leq \langle M, r\rangle \cap \langle N, k'\rangle$, ma essendo $\langle H, r\rangle \cap \langle H, k'\rangle = H$, si ha $(M \cap N)^g \leq H$ e dunque $(M \cap N)^G \leq H$, da cui segue $(M \cap N)^G \leq M \cap N$ e dunque $(M \cap N)^G = M \cap N$.

PROPOSIZIONE 3. *Sia* (H, G) *una* $\mathfrak{X}$*–coppia, e* H *goda della proprietà* (*). *Se* $[\langle H, x\rangle/H]$ *è finito per ogni* $x \in G$, *allora* $H \leq_d G$.

Dimostrazione. In virtù della Proposizione 1.2 di [1], sarà sufficiente provare che $H \leq_d \langle H, x_1, \cdots, x_t\rangle$ per ogni insieme finito di elementi $x_1, \cdots, x_t$ di G. Possiamo dunque supporre $G = \langle H, x_1, \cdots, x_t\rangle$, con le x_i scelte, in accordo con quanto visto nella Proposizione 2, in modo che $|\langle H, x_i\rangle : H|$ sia potenza di qualche primo, e $\langle x_i\rangle$ sia permutabile con H per $i = 1, \cdots, t$ ([4], main theorem). Poiché da $H \leq_q \langle H, x_i\rangle$ per $i = 1, \cdots, t$ segue $H \leq_q G$ (Lemma 2), non è restrittivo assumere $H \not\leq_q \langle H, x_t\rangle$. Ora, poiché possiamo anche supporre che sia $\langle H, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle \neq G$, ne deduciamo che $\langle H, x_1, \cdots \cdots, x_{t-1}\rangle \cap \langle H, x_t\rangle = H$, essendo $|\langle H, x_t\rangle : H| = p$, primo ([4], main theorem). Allora, posto $N = H_{\langle H, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle}$ ed $M = H_{\langle H, x_t\rangle}$, risulta, come già osservato nella dimostrazione del Lemma 3, $H_G = M \cap N$; quindi possiamo supporre $M \cap N = \{1\}$, per cui G è periodico (Lemma 3), né sarà restrittivo assumere $|x_i|$ potenza di primo ($i = 1, \cdots, t$). Proviamo che $\langle N, x_t\rangle$ è un gruppo coprimo con $\langle M, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle$, e che $\langle N, x_t\rangle \lhd G$, $\langle M, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle \lhd G$. Anzitutto, osserviamo che $|N| = |H : M| = q$, primo, e $q < p = |\langle H, x_t\rangle : H|$ ([4], main theorem); vediamo ora che $|x_t| = p$, coprimo con l'ordine di ogni elemento in $\langle H, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle/N$: infatti per ogni $h \in H\setminus N$ si può trovare un $y \in \langle H, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle$ tale che $h^y \notin H$; ma nel gruppo finito $\langle H, x_t, y\rangle/H_{\langle H, x_t, y\rangle}$ (Osservazione 1) il sottogruppo $\langle x_t, N\rangle H_{\langle H, x_t, y\rangle}/H_{\langle H, x_t, y\rangle}$ ha ordine pq e ammette un complemento coprimo ([4], main theorem), d'altra parte evidentemente $h \notin H_{\langle H, x_t, y\rangle}$: se ora $|h|$ è potenza di primo, $|h|$ è coprimo con pq. In modo del tutto analogo si vede che N è coprimo con $\langle H, x_1, \cdots \cdots, x_{t-1}\rangle/N$. Ora supponiamo per assurdo che sia $|\langle N, x_t\rangle| \neq pq$. Essendo $H \leq_d \langle H, x_t\rangle$, e dunque anche $H \cap \langle N, x_t\rangle \leq_d \langle N, x_t\rangle$, si avrebbe $N \underset{\neq}{<} \langle N, x_t\rangle \cap H < \langle N, x_t\rangle$; scelto allora un $h \in (\langle N, x_t\rangle \cap H)\setminus N$, è possibile trovare un $y \in \langle H, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle$ tale che $h^y \notin H$; ma allora nel gruppo finito $\langle H, x_t, y\rangle/H_{\langle H, x_t, y\rangle}$ (Osservazione 1) si ha $|\langle N, x_t\rangle H_{\langle H, x_t, y\rangle}/H_{\langle H, x_t, y\rangle}| = pq$, assurdo essendo $h \in \langle N, x_t\rangle$ ma $h \notin H_{\langle H, x_t, y\rangle}$. Risulta dunque $|N\langle x_t\rangle| = pq$;

proviamo ora che $N\langle x_t\rangle \lhd G$. A tale scopo, osserviamo anzitutto che $N\langle x_t\rangle \lhd \langle H, x_t\rangle$; infatti risulta $N^{H\langle x_t\rangle} = N^{\langle x_t\rangle} = N\langle x_t\rangle \lhd \langle H, x_t\rangle$. Ora, ogni elemento z di $\langle H, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle$ normalizza $\langle N, x_t\rangle H_{\langle H, x_t, z_i\rangle}$, e dunque anche il sottogruppo caratteristico $\langle N, x_t\rangle$. Inoltre $x_i H_{\langle H, x_t, x_i\rangle}$ centralizza $\langle N, x_t\rangle \cdot H_{\langle H, x_t, x_i\rangle}/H_{\langle H, x_t, x_i\rangle}$ per $i = 1, \cdots, t-1$ ([4], main theorem), ma allora x_i centralizza $N\langle x_t\rangle$, essendo $\langle H, x_t\rangle = M \times (N\langle x_t\rangle)$ ed $H_{\langle H, x_t, x_i\rangle} \leq M$ coprimo con $N\langle x_t\rangle$. In conclusione, essendo $\langle M, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle \leq \mathscr{C}(N\langle x_t\rangle)$, risulta $G = (N\langle x_t\rangle) \times \langle M, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle$, inoltre $\langle M, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle \cong \langle H, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle/N$. Siamo ora in grado di concludere che G ha la Schmidt–struttura relativa ad H, usando induzione su t; infatti se $t = 0, 1$ siamo nel caso finito; se $t > 1$ allora $\langle H, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle/N$ ha la Schmidt–struttura relativa ad H/N (ipotesi induttiva), e $G \cong P_1 \times \langle H, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle/N$, ove $P_1 = N\langle x_t\rangle$ è un P–gruppo non abeliano, coprimo con $\langle H, x_1, \cdots, x_{t-1}\rangle/N$.

Tenute presenti le Proposizioni 1 e 3 si perviene al teorema enunciato nella premessa:

TEOREMA. *Sia* (H, G) *una* $\mathscr{X}$*–coppia*; *il sottogruppo* H *è di Dedekind in* G *se e solo se* $H \underset{d}{\leq} \langle H, x\rangle$ *per ogni* $x \in G$.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. PREVIATO (1975) – *Gruppi in cui la relazione di Dedekind è transitiva*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *54*.

[2] E. PREVIATO – *Una caratterizzazione dei sottogruppi di Dedekind di un gruppo finito*, « Rend. Accad. Naz. Lincei Cl. Scienze », in corso di stampa.

[3] R. SCHMIDT (1969) – *Modulare Untergruppen endlicher Gruppen*, « Illinois J. Math. », *13*, 358–377.

[4] R. SCHMIDT (1970) – *Modular subgroups of finite groups*, II, « Illinois J. Math. », *14*, 344–362.

[5] S. E. STONEHEWER – *Modular subgroup structure in infinite groups*, in corso di stampa.

[6] M. SUZUKI (1956) – *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer, Berlin.