
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PIERO MANGANI

**Alcune questioni di teoria dei modelli per linguaggi
predicativi generali**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 60 (1976), n.4, p. 368–376.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_4_368_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Algebra. — *Alcune questioni di teoria dei modelli per linguaggi predicativi generali* (*). Nota di PIERO MANGANI, presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper we define some generalized first-order languages, we prove the Los theorem for these languages and give some applications.

O. PREMESSA

Sia $\rho = \langle 2, 2, 0, 0; \dots \rangle$ un tipo algebrico e K una classe (non vuota) di algebre di tipo ρ tale che:

- i) K è astratta;
- ii) per ogni $\mathcal{W} = \langle W, +, \cdot, 0, 1; \dots \rangle \in K$, $\langle W, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ sia un reticolo completo non degenerare ($0 \neq 1$).

I morfismi fra elementi di K saranno gli omomorfismi completi fra le parti reticolari, che conservano le altre operazioni.

Sia ora $\tau = \langle n_\nu \rangle_{\nu < \alpha}$ un tipo relazionale (n_ν sono naturali $\neq 0$ e α è un ordinale). Chiameremo K - τ -struttura una struttura del tipo: $\mathcal{A} = \langle A, R_\nu^{\mathcal{A}}; \mathcal{W}^{\mathcal{A}} \rangle_{\nu < \alpha}$ dove A è un insieme non vuoto, $\mathcal{W}^{\mathcal{A}} \in K$ e, per ogni $\nu < \alpha$, $R_\nu^{\mathcal{A}}: A^{n_\nu} \rightarrow W^{\mathcal{A}}$.

Indicheremo con $\sum_{\tau}^K$ la classe di tutte le K - τ -strutture ⁽¹⁾.

Associamo ora un linguaggio formale, $\mathcal{L}_\tau^\rho$, a ρ e τ , nel modo seguente: l'alfabeto di $\mathcal{L}_\tau^\rho$ è costituito da una infinità numerabile di variabili individuali V , da connettivi binari $\vee, \wedge$ e da un connettivo (dell'arietà indicata dal tipo ρ) ω per ogni operazione $\bar{\omega}$ «diversa» dalle operazioni «reticolari» (connettivi differenti per operazioni differenti), dai quantificatori $\forall, \exists$, dal simbolo di identità $=$ ed infine da una sequenza $\{P_\nu\}_{\nu < \alpha}$ di simboli predicativi (per ogni $\nu < \alpha$, P_ν ha arietà n_ν). I termini e le formule di $\mathcal{L}_\tau^\rho$ sono definiti per induzione nel modo consueto.

Se $\mathcal{A} \in \sum_{\tau}^K$, $\sigma: V \rightarrow A$ e β è una formula di $\mathcal{L}_\tau^\rho$, il valore di β in $\mathcal{A}$ sotto l'interpretazione σ (valore che indicheremo con il simbolo $|\beta|_\sigma^{\mathcal{A}}$) è definito,

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del GNSAGA-CNR (1976).

(**) Nella seduta del 10 aprile 1976.

(1) Per semplicità di trattazione abbiamo escluso i simboli «funzionali» (e le «costanti individuali») dal tipo ρ .

per induzione sulla struttura di β , nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} |v_i = v_j|_{\sigma}^{\mathcal{A}} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma(v_i) = \sigma(v_j) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \\ |P_v(v_{i_1}, \dots, v_{i_v})|_{\sigma}^{\mathcal{A}} = R_v^{\mathcal{A}}(\sigma(v_{i_1}), \dots, \sigma(v_{i_v})) \end{array} \right. \quad (v_i, v_j \in V) \\
 \text{ii)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} |\beta_1 \vee \beta_2|_{\sigma}^{\mathcal{A}} = |\beta_1|_{\sigma}^{\mathcal{A}} \vee |\beta_2|_{\sigma}^{\mathcal{A}}; \quad |\beta_1 \wedge \beta_2|_{\sigma}^{\mathcal{A}} = |\beta_1|_{\sigma}^{\mathcal{A}} \wedge |\beta_2|_{\sigma}^{\mathcal{A}} \\ |\omega(\beta_1, \dots, \beta_m)|_{\sigma}^{\mathcal{A}} = \bar{\omega}^{\mathcal{A}}(|\beta_1|_{\sigma}^{\mathcal{A}}, \dots, |\beta_m|_{\sigma}^{\mathcal{A}}) \end{array} \right. \\
 \text{iii)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} |\exists v \beta|_{\sigma}^{\mathcal{A}} = \sup_{\mathcal{W}^{\mathcal{A}}} \{|\beta|_{\sigma'}^{\mathcal{A}} : \sigma' \stackrel{v}{=} \sigma\} \quad (v \in V; \sigma': V \rightarrow A; \sigma' \stackrel{v}{=} \sigma) \\ |\forall v \beta|_{\sigma}^{\mathcal{A}} = \inf_{\mathcal{W}^{\mathcal{A}}} \{|\beta|_{\sigma'}^{\mathcal{A}} : \sigma' \stackrel{v}{=} \sigma\} \quad \text{sta per } \sigma' \upharpoonright V - \{v\} = \sigma \upharpoonright V - \{v\}. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

È facile verificare che, se β è un enunciato di $\mathcal{L}_{\tau}^{\circ}$, per ogni $\sigma, \bar{\sigma}: V \rightarrow A$, $|\beta|_{\sigma}^{\mathcal{A}} = |\beta|_{\bar{\sigma}}^{\mathcal{A}}$. Scriveremo allora $|\beta|_{\sigma}^{\mathcal{A}}$ al posto di $|\beta|_{\sigma}^{\mathcal{A}}$.

Se $|\beta|_{\sigma}^{\mathcal{A}} = 1$, diremo che β è «vero in $\mathcal{A}$ sotto σ » e scriveremo $\mathcal{A} \models_{\sigma} \beta$, (1 è il solo valore «designato»). Se β è un enunciato vero in $\mathcal{A}$ scriveremo $\mathcal{A} \models \beta$.

Definiamo anche i seguenti simboli:

$\text{Th}(\mathcal{A}) = \{\beta : \beta \text{ enunciato di } \mathcal{L}_{\tau}^{\circ} \text{ vero in } \mathcal{A}\}.$

$\text{Th}_w(\mathcal{A}) = \{\beta : \beta \text{ enunciato di } \mathcal{L}_{\tau}^{\circ} \text{ tale che } |\beta|_{\sigma}^{\mathcal{A}} = w\} \quad (w \in W^{\mathcal{A}}).$

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ allorché $\text{Th}(\mathcal{A}) = \text{Th}(\mathcal{B})$.

$\text{Val}_{\tau}^K = \{\beta : \beta \text{ enunciato di } \mathcal{L}_{\tau}^{\circ} \text{ e, per ogni } \mathcal{A} \in \sum_{\tau}^K, \mathcal{A} \models \beta\}.$

Due formule β_1, β_2 di $\mathcal{L}_{\tau}^{\circ}$ si diranno logicamente equivalenti (e si scriverà $\beta_1 \sim \beta_2$) allorché per ogni $\mathcal{A} \in \sum_{\tau}^K$ e per ogni $\sigma: V \rightarrow A$ si ha: $|\beta_1|_{\sigma}^{\mathcal{A}} = |\beta_2|_{\sigma}^{\mathcal{A}}$.

È facile ora costruire l'algebra di Lindenbaum-Tarski $\mathcal{F}_{\tau}^{\circ}$ relativa al linguaggio $\mathcal{L}_{\tau}^{\circ}$, a partire dall'algebra delle formule F_{τ}° di tale linguaggio ed utilizzando la congruenza $\sim$.

Si ha:

PROPOSIZIONE I.

i) $\mathcal{F}_{\tau}^{\circ} \in \text{Var}(K)$ (Classe equazionale generata da K).

ii) $\mathcal{F}_{\tau}^{\circ}$ è «funzionalmente libera» in $\text{Var}(K)$ se $\alpha > 0$ ⁽²⁾ (cioè: $\text{Var}(\mathcal{F}_{\tau}^{\circ}) = \text{Var}(K)$).

(2) Cioè se in $\mathcal{L}_{\tau}^{\circ}$ c'è almeno un predicato (diverso dall'identità).

Prova:

Ovviamente $\mathcal{F}_\tau^\rho$ è di tipo ρ . Basterà ora provare che $\mathcal{F}_\tau^\rho$ soddisfa (esattamente, se $\alpha > 0$) le stesse equazioni (nel tipo ρ) soddisfatte contemporaneamente da *ogni* algebra di K .

Sia allora $t_1 = t_2$ un'equazione (nel tipo ρ e nelle variabili di un insieme X opportuno) valida in *ogni* algebra di K e $\eta' : X \rightarrow \mathcal{F}_\tau^\rho$ e verifichiamo che $t_1 = t_2$ vale in $\mathcal{F}_\tau^\rho$ sotto η' . Siano μ l'epimorfismo canonico di F_τ^ρ su $\mathcal{F}_\tau^\rho$ ed $\eta : X \rightarrow F_\tau^\rho$ tale che $\mu \circ \eta = \eta'$ ed indichiamo con $\bar{\eta}$ l'estensione di η ai termini (in ρ ed X). È di routine verificare ora che $\bar{\eta}(t_1)$ e $\bar{\eta}(t_2)$ sono due formule di $\mathcal{L}_\tau^\rho$ logicamente equivalenti, da cui segue che $t_1 = t_2$ è vera in $\mathcal{F}_\tau^\rho$ sotto η' .

Sia ora $\alpha > 0$ e $t_1 = t_2$ vera in $\mathcal{F}_\tau^\rho$. Esista, per assurdo, $\mathcal{W} \in K$ ed $\eta : X \rightarrow \mathcal{W}$ tale che $\bar{\eta}(t_1) \neq \bar{\eta}(t_2)$. Poiché in $\sum_{\tau}^K$ ci sono *tutte* le Σ - τ -strutture (e nel linguaggio c'è almeno un predicato differente dall'identità) esisterà $\mathcal{A} \in \sum_{\tau}^K$ tale che $\mathcal{W}^{\mathcal{A}} = \mathcal{W}$ ed almeno una $R_v^{\mathcal{A}}$ avrà codominio $\supseteq \eta(X)$. Potremo allora definire $\sigma : V \rightarrow A$ in modo che $|t_1^v|_{\sigma}^{\mathcal{A}} \neq |t_2^v|_{\sigma}^{\mathcal{A}}$ e questo è assurdo, poiché dall'ipotesi che $t_1 = t_2$ valga in $\mathcal{F}_\tau^\rho$ segue che $t_1^v \sim t_2^v$ (con il simbolo t_i^v ($i = 1, 2$) abbiamo indicato la formula di $\mathcal{L}_\tau^\rho$ ottenuta da t_i , in modo «naturale», «sostituendo» opportune formule atomiche del tipo $P_v(v_{j_1}, \dots, v_{j_{m_v}})$ alle variabili di t_i).

OSSERVAZIONE. Il risultato ii) è chiaramente falso senza l'ipotesi $\alpha > 0$, poiché le formule atomiche, nel caso $\alpha = 0$, assumono *solo* i valori 0 ed 1; un controesempio si ha considerando la logica associata, nel nostro modo, ad un reticolo modulare, non distributivo.

Concludiamo la premessa osservando che, con opportuna specializzazione di ρ e di k , molte delle logiche predicative (logiche booleane, logiche di Post, cfr. [4], logiche di Łukasiewicz, cfr. [5]) rientrano nello schema precedente⁽³⁾.

1. MORFISMI ED OPERAZIONI ALGEBRICHE FRA Σ - τ -STRUTTURE

Vogliamo ora indicare brevemente alcuni concetti di « morfismo » per le Σ - τ -strutture e dare alcuni risultati su questioni connesse con tali concetti.

Siano $\mathcal{A} = (A, R_v^{\mathcal{A}}, \mathcal{W}^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (B, R_v^{\mathcal{B}}, \mathcal{W}^{\mathcal{B}}) \in \sum_{\tau}^K$; diremo *morfismo da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$* un'applicazione $h : A \rightarrow B$ tale che, per ogni $v < \alpha$ ed ogni $(a_1, \dots, a_{n_v}) \in A^{n_v}$, si abbia: se $R_v^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{n_v}) = 1$ allora $R_v^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{n_v})) = 1$.

(3) Naturalmente avremmo potuto introdurre l'algebra cilindrica generalizzata associata al linguaggio $\mathcal{L}_\tau^\rho : \langle \mathcal{F}_\tau^\rho, \exists_j, \forall_j, d_{ij} \rangle$ $i, j < \omega$ dove, per ogni $[\beta]$ di $\mathcal{F}_\tau^\rho$, $\exists_j[\beta] = [\exists v_j \beta]$, $\forall_j[\beta] = [\forall v_j \beta]$, $d_{ij} = [v_i = v_j]$. Uno studio di tali algebre e delle loro « astrazioni » può presentare un certo interesse nel caso di logiche (Post, Łukasiewicz, etc.) « importanti », ma non verrà affrontato qui. Per il caso classico cfr. [3].

Diremo *morfismo stretto* da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ una coppia $\langle h, k \rangle$ tale che:

- i) $h: A \rightarrow B$.
- ii) k è un *omomorfismo completo* da $\mathcal{W}^{\mathcal{A}}$ a $\mathcal{W}^{\mathcal{B}}$.
- iii) Per ogni $v < \alpha$ ed ogni $(a_1, \dots, a_{n_v}) \in A^{n_v}$ si ha: $k(R_v^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_{n_v})) = R_v^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_{n_v}))$.

Un *isomorfismo* è un morfismo stretto tale che h è biiettivo e k è un isomorfismo. Se esiste un isomorfismo fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ scriveremo: $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$. Ovviamente se $\langle h, k \rangle$ è un morfismo stretto, h risulta un morfismo fra Σ - τ -strutture.

Si ha ora il seguente:

LEMMA 1. Se $\langle h, k \rangle$ è un isomorfismo fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si ha, per ogni formula β di $\mathcal{L}_\tau^0$: $k(|\beta|_{\sigma}^{\mathcal{A}}) = |\beta|_{h \circ \sigma}^{\mathcal{B}}$ ($\sigma: V \rightarrow A$).

Dimostrazione. Per induzione sulla complessità di β ; l'unico caso non di routine è il caso $\beta = \exists v \gamma$ (oppure $\beta = \forall v \gamma$). Faremo la dimostrazione per il caso $\exists v \gamma$.

Si ha: $k(|\exists v \gamma|_{\sigma}^{\mathcal{A}}) = k(\sup_{\gamma \in \mathcal{W}^{\mathcal{A}}} \{|\gamma|_{\sigma'}^{\mathcal{A}} : \sigma' \underset{v}{=} \sigma\}) = \sup_{\gamma \in \mathcal{W}^{\mathcal{B}}} \{k(|\gamma|_{\sigma'}^{\mathcal{A}}) : \sigma' \underset{v}{=} \sigma\}$ (poiché un isomorfismo fra reticoli completi è completo). Applicando ora l'ipotesi induttiva si ha: $\sup_{\gamma \in \mathcal{W}^{\mathcal{B}}} \{k(|\gamma|_{\sigma'}^{\mathcal{A}}) : \sigma' \underset{v}{=} \sigma\} = \sup_{\gamma \in \mathcal{W}^{\mathcal{B}}} \{|\gamma|_{h \circ \sigma'}^{\mathcal{B}} : \sigma' \underset{v}{=} \sigma\} = \sup_{\gamma \in \mathcal{W}^{\mathcal{B}}} \{|\gamma|_{\bar{\sigma}}^{\mathcal{B}} : \bar{\sigma} \underset{v}{=} h \circ \sigma\} = |\exists v \gamma|_{h \circ \sigma}^{\mathcal{B}}$ (infatti: se $\bar{\sigma} \underset{v}{=} h \circ \sigma$ esiste un $\sigma' : V \rightarrow A$ tale che $\sigma' \underset{v}{=} \sigma$ e $h \circ \sigma' = \bar{\sigma}$, poiché basta porre $\sigma' = h^{-1} \circ \bar{\sigma}$).

Si ha ora il seguente:

COROLLARIO 1. Se $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ allora $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Non ci dilunghiamo ulteriormente sui concetti categoriali relativi alle K - τ -strutture, essendo la questione del tutto di routine. Osserviamo soltanto che la classe $\sum_{\tau}^K$ è chiusa sotto i prodotti diretti nel caso che K lo sia.

2. ULTRAPRODOTTI DI K - τ -STRUTTURE

Vogliamo ora definire il concetto di ultraprodotto per K - τ -strutture e provare l'analogo del teorema di Łos. Da ciò seguiranno diverse interessanti conseguenze.

Sia $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ ($\mathcal{A}_i = \langle A_i, R_v^{\mathcal{A}_i}; \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i} \rangle_{v < \alpha}$) una famiglia non vuota di K - τ -strutture.

Se $f_1, \dots, f_{n_v} \in \prod_{i \in I} A_i$, definiamo $\psi_{(f_1, \dots, f_{n_v})} \in \prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}$ nel modo seguente:

$$\psi_{(f_1, \dots, f_{n_v})}^{(i)} = R_v^{\mathcal{A}_i}(f_1(i), \dots, f_{n_v}(i)).$$

Sia ora D un filtro su I e $\sim_D, \widetilde{\sim}_D$ le relazioni di equivalenza ad esso associate rispettivamente su $\prod_{i \in I} A_i$ e $\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}$. Si ha:

LEMMA 2. Se $f_1 \sim_D f'_1, \dots, f_{n_v} \sim_D f'_{n_v}$ allora $\psi_{(f_1, \dots, f_{n_v})} \widetilde{\sim}_D \psi_{(f'_1, \dots, f'_{n_v})}$.

Siano:

$$\Delta_1 = \{i \in I : f_1(i) = f'_1(i)\}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Delta_{n_v} = \{i \in I : f_{n_v}(i) = f'_{n_v}(i)\}$$

$$\Delta = \{i \in I : \psi_{(f_1, \dots, f_{n_v})}^{(i)} = \psi_{(f'_1, \dots, f'_{n_v})}^{(i)}\}.$$

Per l'ipotesi $\Delta_1 \cap \dots \cap \Delta_{n_v} \in D$. Sia $i \in \Delta_1 \cap \dots \cap \Delta_{n_v}$: Si ha

$$R_v^{\mathcal{A}_i}(f_1(i), \dots, f_{n_v}(i)) = R_v^{\mathcal{A}_i}(f'_1(i), \dots, f'_{n_v}(i)). \text{ e dunque } i \in \Delta.$$

Poiché allora $\Delta \supseteq \Delta_1 \cap \dots \cap \Delta_{n_v}$ segue che $\Delta \in D$ ed il lemma è provato.

Siamo ora in grado di definire il concetto di *prodotto ridotto* (della famiglia $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, rispetto a D): poniamo $\mathcal{A} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/D = \langle \prod_{i \in I} A_i/D, R_v^{\mathcal{A}}; \prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}/D \rangle$, dove, per ogni $[f_1], \dots, [f_{n_v}] \in \prod_{i \in I} A_i/D$, si ha $R_v^{\mathcal{A}}([f_1], \dots, [f_{n_v}]) = [\psi_{(f_1, \dots, f_{n_v})}]$.

Si osservi che, in generale, $\mathcal{A}$ non appartiene a $\sum_{\tau}^K$. (Ovviamente se $\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}/D \in K$, allora $\mathcal{A} \in \sum_{\tau}^K$).

Se D è un ultrafiltro su I , $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/D$ prende il nome di *ultraprodotto* della famiglia $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$, rispetto a D .

Si ha ora il seguente:

LEMMA 3. Se D è ultrafiltro principale su I , generato da $\{j\}$, allora $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/D \sim \mathcal{A}_j$.

Nelle ipotesi del lemma si ha: $\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}/D \sim \mathcal{W}_j$ e $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/D \approx \mathcal{A}_j$.

Siano allora k l'isomorfismo canonico di $\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}/D$ su $\mathcal{W}_j$ ($k[g] = g(j)$) ed h la biiezione canonica fra $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/D$ e $\mathcal{A}_j$ ($h[f] = f(j)$).

Proviamo che (h, k) è un isomorfismo fra $\mathcal{A} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/D$ ed $\mathcal{A}_j$. Sarà sufficiente provare che: $k(R_v^{\mathcal{A}}([f_1], \dots, [f_{n_v}])) = R_v^{\mathcal{A}_j}(h[f_1], \dots, h[f_{n_v}])$.

Ora:

$$\begin{aligned} k(R_v^{\mathcal{A}}([f_1], \dots, [f_{n_v}])) &= k([\psi]_{(f_1, \dots, f_{n_v})}) = \psi_{(f_1, \dots, f_{n_v})}^{(j)} = \\ &= R_v^{\mathcal{A}_j}(f_1(j), \dots, f_{n_v}(j)) = R_v^{\mathcal{A}_j}(h[f_1], \dots, h[f_{n_v}]). \end{aligned}$$

Il lemma è così provato.

Abbiamo dunque che ultraprodotti « interessanti » si ottengono soltanto con ultrafiltri non principali.

Sia ora $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ una famiglia di K - τ -strutture e D ultrafiltro su I .

Indichiamo con λ l'epimorfismo canonico di $\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}$ su $\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}/D$, con p_i la proiezione di $\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}$ su $\mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}$, con μ l'applicazione canonica di $\prod_{i \in I} A_i$ su $\prod_{i \in I} A_i/D$ e con π_i la proiezione di $\prod_{i \in I} A_i$ su A_i .

Se $\sigma \in (\prod_{i \in I} A_i)^V$, denotiamo $\pi_i \circ \sigma$ con σ_i e $\mu \circ \sigma$ con $\bar{\sigma}$.

Sia, per il seguito, verificata la seguente condizione:

(*) $\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}/D \in K$ (o, più debolmente, che $\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}/D$ sia completo come reticolo⁽⁴⁾).

Se consideriamo allora, per ogni formula α di $\mathcal{L}_\tau^o$ ed ogni $\sigma \in (\prod_{i \in I} A_i)^V$, $\chi_\alpha^\sigma \in \prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}$, definito da $\chi_\alpha^\sigma(i) = |\alpha|_{\sigma_i}^{\mathcal{A}_i}$ si ha il seguente fondamentale:

TEOREMA. $|\alpha|_{\bar{\sigma}}^{\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/D} = [\chi_\alpha^\sigma]$. (Tale teorema è l'analogo del teorema di Los per gli ultraprodotti nel caso classico).

Dimostrazione (per induzione sulla complessità di α):

Sia α atomica: Se α è del tipo $P_v(v_1, \dots, v_n)$, l'enunciato del teorema è vero per la definizione di ultraprodotto.

Sia allora α del tipo: $v_1 = v_2$.

Se $|v_1 = v_2|_{\bar{\sigma}}^{\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/D} = 1$, allora:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(v_1) = \bar{\sigma}(v_2) &\Rightarrow \lambda(\sigma(v_1)) = \lambda(\sigma(v_2)) \Rightarrow \{i \in I : (\sigma(v_1))(i) = (\sigma(v_2))(i)\} \in D \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{i \in I : \sigma_i(v_1) = \sigma_i(v_2)\} \in D \Rightarrow \{i \in I : |v_1 = v_2|_{\sigma_i}^{\mathcal{A}_i} = 1\} \in D \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{i \in I : \chi_{v_1=v_2}^\sigma(i) = 1\} \in D \Rightarrow [\chi_{v_1=v_2}^\sigma] = 1. \end{aligned}$$

Se $|v_1 = v_2|_{\bar{\sigma}}^{\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/D} = 0$ allora: $\bar{\sigma}(v_1) \neq \bar{\sigma}(v_2) \Rightarrow \{i \in I : \sigma_i(v_1) = \sigma_i(v_2)\} \notin D$. Poiché D è un ultrafiltro: $\{i \in I : \sigma_i(v_1) \neq \sigma_i(v_2)\} \in D$ e quindi:

$$\{i \in I : |v_1 = v_2|_{\sigma_i}^{\mathcal{A}_i} = 0\} \in D \Rightarrow \{i \in I : \chi_{v_1=v_2}^\sigma(i) = 0\} \in D \Rightarrow [\chi_{v_1=v_2}^\sigma] = 0.$$

Sia vero l'enunciato del teorema per le formule $\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ di $\mathcal{L}_\tau^o$. Proviamo che risulta ancora vero per le formule $\alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \omega(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

(4) L'ipotesi, sotto condizioni meno restrittive delle nostre date nella Premessa, potrebbe essere eliminata.

Sarà per questo sufficiente provare che

$$\chi_{\omega(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}^\sigma = \overline{\omega}^{\prod_{i \in I} \mathcal{W} \mathcal{A}_i} (\chi_{\alpha_1}^\sigma, \dots, \chi_{\alpha_n}^\sigma), \quad \chi_{\alpha \dot{\vee} \beta}^\sigma = \chi_\alpha^\sigma \dot{+} \chi_\beta^\sigma.$$

Ad esempio:

$$\chi_{\alpha \vee \beta}^\sigma(i) = |\alpha \vee \beta|_{\sigma_i}^{\mathcal{A}_i} = |\alpha|_{\sigma_i}^{\mathcal{A}_i} + |\beta|_{\sigma_i}^{\mathcal{A}_i} = \chi_\alpha^\sigma(i) + \chi_\beta^\sigma(i) = (\chi_\alpha^\sigma + \chi_\beta^\sigma)(i),$$

per ogni $i \in I$.

Sia vero l'enunciato del teorema per α e proviamo che è ancora vero per $\forall v \alpha$ ed $\exists v \alpha$.

Permettiamo allo scopo alcuni lemmi:

- (1) Per ogni $\sigma_0 \in (\prod_{i \in I} A_i / D)^V$ esiste un $\sigma \in (\prod_{i \in I} A_i)^V$ tale che $\sigma_0 = \overline{\sigma}$ (dimostrazione ovvia).
- (2) Se $\sigma_1, \sigma_2 \in (\prod_{i \in I} A_i)^V$ sono tali che $\overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_2$, allora $[\chi_\alpha^{\sigma_1}] = [\chi_\alpha^{\sigma_2}]$, per ogni formula α di $\mathcal{L}_\tau^\circ$.

Dimostrazione. Sia $\Delta = \{i \in I : \chi_\alpha^{\sigma_1}(i) = \chi_\alpha^{\sigma_2}(i)\}$. Proviamo che $\Delta \in D$.

Poiché, per ogni $v \in V$, si ha $[\sigma_1(v)] = [\sigma_2(v)]$, segue che $\{i \in I : (\sigma_1(v))(i) = (\sigma_2(v))(i)\} \in D$, cioè che $\{i \in I : \sigma_{1i}(v) = \sigma_{2i}(v)\} \in D$. α ha un numero finito di variabili libere, diciamo $v_1^\alpha, \dots, v_n^\alpha$. Poniamo: $\Delta_1^\alpha = \{i \in I : \sigma_{1i}(v_1^\alpha) = \sigma_{2i}(v_1^\alpha)\}, \dots, \Delta_n^\alpha = \{i \in I : \sigma_{1i}(v_n^\alpha) = \sigma_{2i}(v_n^\alpha)\}$.

Ovviamente $\Delta_1^\alpha \cap \dots \cap \Delta_n^\alpha \in D$. La prova sarà completa se $\Delta \supseteq \Delta_1^\alpha \cap \dots \cap \Delta_n^\alpha$. Sia $j \in \Delta_1^\alpha \cap \dots \cap \Delta_n^\alpha$; allora σ_{1j} coincide con σ_{2j} sull'insieme delle variabili di α e quindi $|\alpha|_{\sigma_{1j}}^{\mathcal{A}_j} = |\alpha|_{\sigma_{2j}}^{\mathcal{A}_j}$, da cui infine, per la definizione di $\chi_\alpha^\sigma, j \in \Delta$.

$$(3) \text{ i) } \chi_{\forall v \alpha}^\sigma = \inf_{\prod_{i \in I} \mathcal{W} \mathcal{A}_i} \{\chi_\alpha^{\sigma'} : \sigma' \stackrel{v}{=} \sigma\}$$

$$\text{ii) } \chi_{\exists v \alpha}^\sigma = \sup_{\prod_{i \in I} \mathcal{W} \mathcal{A}_i} \{\chi_\alpha^{\sigma'} : \sigma' \stackrel{v}{=} \sigma\}.$$

(Ricordiamo che un prodotto diretto di reticoli completi è completo e $\sup$ ed $\inf$ nel prodotto sono « determinati », componente per componente, dal $\sup$ e dall' $\inf$ dei fattori).

Proviamo, ad esempio, la i).

$$\chi_{\forall v \alpha}^\sigma(i) = |\forall v \alpha|_{\sigma_i}^{\mathcal{A}_i} = \inf_{\mathcal{W} \mathcal{A}_i} \{|\alpha|_{\sigma'_i}^{\mathcal{A}_i} : \sigma'_i \stackrel{v}{=} \sigma_i\} = \inf_{\mathcal{W} \mathcal{A}_i} \{\chi_\alpha^{\sigma'}(i) : \sigma' \stackrel{v}{=} \sigma\}.$$

(L'ultima eguaglianza vale poiché: se $\sigma' \stackrel{v}{=} \sigma$ allora ovviamente $(\sigma')_i \stackrel{v}{=} \sigma_i$ e dunque $(\sigma')_i$ è uno dei σ'_i ; viceversa, se $\sigma'_i \stackrel{v}{=} \sigma_i$ esiste un $\overline{\sigma} \stackrel{v}{=} \sigma$ tale che $(\overline{\sigma})_i = \sigma'_i$).

(4) λ conserva i supremi (e gli infimi) dei «rettangoli» in $\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}$ (cioè dei sottoinsiemi $Z \subseteq \prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}$ tali che $Z = \bigcap_{i \in I} p_i(Z)$).

Sia infatti Z un rettangolo in $\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}$, proviamo che, posto $t = \sup \{z : z \in Z\}$, $[t] = \sup \{[z] : z \in Z\}$. Ovviamente $[t] \geq [z]$, per ogni $z \in Z$. Sia $[x] \geq [z]$, per ogni $z \in Z$: allora $\{i \in I : \chi_i \geq z_i\} \in D$, per ogni $z \in Z$. Se fosse $[t] \not\leq [x]$ si avrebbe: $\{i \in I : t_i \not\leq x_i\} \in D$, cioè $\{i \in I : \sup \{z_i : z \in Z\} \not\leq \chi_i\} \in D$ ed infine $\{i \in I : \text{esiste } z_i \in p_i(Z) \text{ con } z_i \not\leq \chi_i\} \in D$. Esisterebbe allora un elemento $z_0 \in \prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}$ tale che $[z_0] \not\leq [x]$ e $z_0 \in Z$, il che è assurdo.

Siamo ora in grado di completare la dimostrazione del teorema fondamentale:

$$\left| \forall v \alpha \right|_{\frac{i \in I}{\sigma}}^{\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/D} = \inf_{\frac{i \in I}{\sigma'}^{\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i/D}}} \left\{ \left| \alpha \right|_{\frac{i \in I}{\sigma'}}^{\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/D} : \overline{\sigma'} = \overline{\sigma} \right\} = \inf_{\frac{i \in I}{\sigma'}^{\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i/D}}} \left\{ [\chi_\alpha^{\sigma'}] : \sigma' = \overline{\sigma} \right\}.$$

Per il lemma (4) si ha ora:

$$\inf_{\frac{i \in I}{\sigma'}^{\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i/D}}} \left\{ [\chi_\alpha^{\sigma'}] : \sigma' = \overline{\sigma} \right\} = \left[\inf_{\frac{i \in I}{\sigma'}^{\prod_{i \in I} \mathcal{W}^{\mathcal{A}_i}}} \left\{ \chi_\alpha^{\sigma'} : \sigma' = \overline{\sigma} \right\} \right] = [\chi_{\forall v \alpha}^{\sigma}].$$

Sempre nell'ipotesi del teorema fondamentale si ha il seguente:

COROLLARIO 1. Se α è un enunciato di $\mathcal{L}_\tau^\circ$ si ha: $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/D \models \alpha$ se e solo se $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \alpha\} \in D$.

Come applicazione di quanto visto sopra si ha:

COROLLARIO 2. Se K è chiusa sotto gli ultraprodotti allora la logica $\mathcal{L}_\tau^\circ$ è compatta (cioè, se Γ è un insieme di enunciati di $\mathcal{L}_\tau^\circ$ tale che ogni suo sottoinsieme finito ha un K - τ -modello allora Γ ha un K - τ -modello).

L'ipotesi del Corollario 2 è evidentemente soddisfatta se K è assiomatica (nel tipo ρ) e l'insieme degli enunciati veri in K ha soltanto modelli finiti.

Come conseguenza di quanto osservato ritroviamo la compattezza delle seguenti logiche:

- 1) Logica predicativa classica.
- 2) Logiche predicative di Post (cfr. [4]).
- 3) Logiche predicative di Łukasiewicz, con un numero finito di valori verità (cfr. [5]).

Abbiamo inoltre che risultano compatte, ad esempio, le logiche seguenti:

- 4) Logiche predicative su reticoli finiti.
- 5) Logiche predicative su algebre di Heyting finite.

Concludiamo con i seguenti problemi aperti:

a) Se $\text{Var} (K)$ è ricorsivamente assiomatizzabile, Val_τ^K è ricorsivamente enumerabile?

b) Costruire un calcolo alla Gentzen per le logiche $\mathcal{L}_\tau^\circ$, quando Val_τ^K è ricorsivamente enumerabile (cfr. [6]).

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. L. BELL e A. B. SLOMSON (1971) – *Models and Ultraproducts*, North Holland P.C.
- [2] C. C. CHANG e J. H. KEISLER (1966) – *Continuous Model Theory*, Princeton University Press.
- [3] L. HENKIN, J. D. MONK e A. TARSKI (1971) – *Cylindric Algebras (I)*, North Holland P.C.
- [4] H. RASIOWA (1974) – *An algebraic approach to non-classical logics*, North Holland P.C.
- [5] N. RESCHER (1969) – *Many-valued logic*, McGraw Hill.
- [6] V. G. KIRIN (1966) – *Gentzen's method for the many-valued propositional calculi*, «Zeitschrift für Math. Logik und Grund. der Math.», 12, 317–332.