Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Lacava, Donato Saeli

Proprietà e model-completamento di alcune varietà di algebre di Łukasiewicz

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.4, p. 359–367.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_4_359_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Algebra. — *Proprietà e model-completamento di alcune varietà di algebre di Łukasiewicz.* Nota di FRANCESCO LACAVA e DONATO SAELI, presentata (*) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this Note some algebraic properties of $Ł_n$-algebras are studied. Model-completion's existence and axioms, for $Ł_n$ theories, are found.

1. PROPRIETÀ ALGEBRICHE DELLE $Ł_3$-ALGEBRE

1.0. Riterremo noti i contenuti di [3], [4] e [6] e adotteremo, per ciò che segue, le notazioni di [8], con la sola aggiunta che indicheremo con $\mathscr{L}$ il linguaggio con cui sono « descritte » le varie teorie.

Ricordiamo inoltre che:

1) Posto $C_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ e se $x, y \in C_n$:

$x \oplus y = \min(x + y, 1)$ e $x' = 1 - x$;

$\mathscr{C}_n = \langle C_n, \oplus, '; 0, 1 \rangle$ è una Ł-catena per ogni naturale $n \geq 2$.

2) In ogni MV-algebra:

a) $x + y = 0$ sse $x = 0$ e $y = 0$,

b) $x \cdot y = 1$ sse $x = 1$ e $y = 1$.

3) In ogni MV-algebra se $x \vee y = 1$ e x e y sono confrontabili allora $x = 1$ oppure $y = 1$.

1.1. Indichiamo con $Ł_3$ e $Ł_3C$ le estensioni di Ł e ŁC rispettivamente, ottenute aggiungendo ai loro sistemi di assiomi l'assioma:

a_{III} $$x \cdot x \vee (x + x)' \vee (x + x) \cdot (x \cdot x)' = 1.$$

Diremo $Ł_3$-algebre i modelli di $Ł_3$ e $Ł_3$-catene i modelli di $Ł_3C$.

LEMMA 1.1.1. *In ogni $Ł_3$-catena se $x \neq 1$ e $x \neq 0$ allora $x = x'$, inoltre se anche $y \neq 1$ e $y \neq 0$ allora $x = y$.*

Dimostrazione. x dove soddisfare a_{III}; poiché $x \neq 1$ è anche $x \cdot x \neq 1$, da $x \neq 0$ segue che $(x + x)' \neq 1$, così deve essere $x \cdot x \vee (x + x)' \neq 1$ e $(x + x) \cdot (x \cdot x)' = 1$ da cui $x + x = 1$ e $(x \cdot x)' = x' + x' = 1$ cioè $x = x'$. Così anche $y = y'$, ne segue $x' + y = x + y'$ e per a_9 $x = y$.

(*) Nella seduta del 10 aprile 1976.

COROLLARIO 1.1.2. $Ł_3C$ *ha (a meno di isomorfismi) due soli modelli: le* Ł*-catene* C_2 *e* C_3, *onde è decidibile.*

Si verifica facilmente che il Lemma 3 di [4] assume in questo caso la forma:

LEMMA 1.1.3. *Ogni* $Ł_3$*-algebra è prodotto sottodiretto di* $Ł_3$*-catene.*

COROLLARIO 1.1.4. *La teoria universale di* $Ł_3$ *è decidibile* (1).

1.2. Indichiamo con $T_n(\mathscr{L})$ l'insieme di tutti i termini di $\mathscr{L}$ con al più n delle variabili $x_1, \cdots, x_n$.

Se $t_1, t_2 \in T_n(\mathscr{L})$ poniamo:

$$t_1 \sim_3 t_2 \qquad \text{sse} \quad \vdash_{Ł_3} t_1 = t_2 \; (\vdash_{Ł_3} t_1 = t_2 \text{ sse } C_3 \models t_1 = t_2)$$

è ovvio che $\sim_3$ è una relazione di equivalenza in $T_n(\mathscr{L})$.

Se $\bar{t}_1$ e $\bar{t}_2 \in T_n(\mathscr{L})/\sim_3$ poniamo:

$$\bar{t}_1 \hat{+} \bar{t}_2 = \overline{t_1 + t_2} \qquad \text{e} \qquad (\bar{t}_1)^{\hat{}} = \bar{t}_1' ;$$

si verifica immediatamente che queste definizioni non dipendono dai rappresentanti e che la struttura $T_{n,3} = \langle T_n(\mathscr{L})/\sim_3, \hat{+}, {}^{\hat{}}; \bar{0}, \bar{1} \rangle$ è la $Ł_3$-algebra libera su n generatori. Notiamo inoltre che ogni elemento di $T_{n,3}$ può essere riguardato come una funzione da C_3^n in C_3, inoltre elementi distinti danno luogo a funzioni distinte.

Indichiamo con $F_{n,3}$ l'insieme di tutte le funzioni da C_3^n in C_3, se f e $g \in F_{n,3}$, poniamo:

$$(f \tilde{+} g)(x) = f(x) \oplus g(x) \qquad \text{e} \qquad (f^{\tilde{}})(x) = (f(x))' \qquad \text{per ogni} \quad x \in C_3^n ;$$

notiamo con $\tilde{0}$ e $\tilde{1}$ gli elementi di $F_{n,3}$ che assumono valore costante 0 e 1 rispettivamente; la struttura $\mathscr{F}_{n,3} = \langle F_{n,3}, \tilde{+}, {}^{\tilde{}}; \tilde{0}, \tilde{1} \rangle$ è una $Ł_3$-algebra.

Se si fissa una relazione di ordine totale su C_3^n la rappresentazione mediante « tavole di verità » delle funzioni da C_3^n in C_3 ci suggerisce come ogni tale funzione può essere identificata con un elemento di $C_3^{3^n}$; risulta così evidente che $\mathscr{F}_{n,3} \simeq \mathscr{C}_3^{3^n}$.

TEOREMA 1.2.1. $T_{n,3}$, *è isomorfa alla sottoalgebra* $\mathscr{C}_2^{2^n} \otimes \mathscr{C}_3^{(3^n - 2^n)}$ *di* $\mathscr{C}_3^{3^n}$.

(1) Un risultato più forte (decidibilità della teoria $Ł_3$) si può ottenere da fatti generali sulle algebre quasi primali (cfr. [6] e [2]).

Dimostrazione. – Supponiamo di aver elencato ordinatamente tutti gli elementi di C_3^n:

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}, \cdots, a_{1n}) \\ (a_{21}, \cdots, a_{2n}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{2^n 1}, \cdots, a_{2^n n})\end{array}\right\} \; 2^n \; n\text{–ple in cui non compare l'elemento } 1/2$$

$$\left.\begin{array}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{3^n 1}, \cdots, a_{3^n n})\end{array}\right\} \; 3^n - 2^n$$

in 2^n di queste n–ple di elementi di C_3 non compare l'elemento $1/2$, supponiamo di aver elencato prima queste e poi tutte le altre.

Definiamo una applicazione φ da $T_n(\mathscr{L})/\sim_3$ in $C_3^{3^n}$ come segue: se $\bar{t} \in T_n(\mathscr{L})/\sim_3$ poniamo:

$$\varphi(\overline{t(x_1, \cdots, x_n)}) = \begin{pmatrix} t(a_{11}, \cdots, a_{1n}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t(a_{3^n 1}, \cdots, a_{3^n n}) \end{pmatrix}.$$

Si verifica che φ è ben definita ed è un monomorfismo proprio da $T_{n,3}$ in $\mathscr{C}_3^{3^n}$. Osserviamo che se:

$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{3^n} \end{pmatrix} \in \varphi(T_n(\mathscr{L})/\sim_3)$, si ha $b_i \neq 1/2$ per $i = 1, \cdots, 2$ ($\mathscr{C}_2$ è sottoalgebra di $\mathscr{C}_3$); da ciò segue che $\varphi(T_{n,3})$ è isomorfa a $\mathscr{C}_2^{2^n} \otimes \mathscr{C}_3^{(3^n - 2^n)}$.

OSSERVAZIONE 1. Dato un termine $t(x_1, \cdots, x_n) \in T_n(\mathscr{L})$ possiamo scegliere (uniformemente) un rappresentante di $\bar{t} \in T_n(\mathscr{L})/\sim_3$, che diremo una « forma canonica » di t in $Ł_3$.

Per quanto detto prima si ha: $\bar{t}(a_{j1}, \cdots, a_{jn}) = b_j \in C_3$ e se $b_j = 1/2$ vi è almeno un i per cui $a_{ji} = 1/2$; associamo a $(a_{j1}, \cdots, a_{jn})$ il termine $s_{j1} \wedge \cdots \wedge s_{jn}$ dove:

$$s_{ji} = \begin{cases} (x_i + x_i)' & \text{se } a_{ji} = 0 \text{ e } b_j \neq 0 \\ x_i \wedge x_i' & \text{se } a_{ji} = 1/2 \text{ e } b_j = 1/2 \\ (x_i + x_i) \cdot (x_i \cdot x_i)' & \text{se } a_{ji} = 1/2 \text{ e } b_j = 1 \\ x_i \cdot x_i & \text{se } a_{ji} = 1 \text{ e } b_j \neq 0 \\ 0 & \text{se } b_i = 0 \end{cases}$$

il termine $\bigvee_j^{3^n} (\bigwedge_i^h s_{ji}) \in \bar{t}$.

1.3. Sia $\mathscr{B} = \langle B, \vee, ^{-}; 0, 1 \rangle$ un'algebra di Boole. Consideriamo il sottoinsieme A di B^2 costituito dalle coppie (x, y) con $x \leq y$ e definiamo in A le seguenti operazioni:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = ((x_1 \wedge y_2^{-}) \vee (x_2 \wedge y_1^{-}), y_1 \vee y_2)$$

$$(x, y)' = (x, y^{-} \vee x);$$

si verifica che la struttura $\mathscr{A} = \langle A, +, '; (0, 0), (0, 1) \rangle$ è una $Ł_3$–algebra.

Notiamo che $\mathscr{B}$ si può immergere canonicamente in $\mathscr{A}$ nel seguente modo: per ogni $x \in \mathscr{B}$ poniamo: $\varphi(x) = (0, x)$.

Chiameremo *$\mathscr{A}$ la $Ł_3$–algebra associata a $\mathscr{B}$.*

Sia ora $\mathscr{A} = \langle A, +, '; 0, 1 \rangle$ una $Ł_3$–algebra. Consideriamo il sottoinsieme B degli elementi idempotenti di $\mathscr{A}$ (chiaramente $B = 2A = \{2x : x \in A\}$) [2]; tale insieme con le restrizioni delle operazioni definite su A è un'algebra di Boole (cfr. [3]). Tale algebra verrà chiamata *algebra di Boole fondamentale di $\mathscr{A}$.*

Sia $\overline{\mathscr{A}}$ la $Ł_3$–algebra associata all'algebra di Boole fondamentale di $\mathscr{A}$ Si ha il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 1.3.1. *$\mathscr{A}$ è « canonicamente » immergibile in $\overline{\mathscr{A}}$.*

Anteponiamo alla dimostrazione alcune premesse.

DEFINIZIONE. Se $x \in A$ diremo l'elemento $((2x)' + x)'$ *l'invariante di x*; se $((2x)' + x)' = x$ allora diremo che x è *invariante.*

LEMMA 1.3.2. *Sia $\mathscr{A}$ una $Ł_3$–algebra, si ha:*

1) *se $x \in A$, $((2x)' + x)$ è invariante;*

2) *se x e y sono invarianti e $2x = 2y$ allora $x = y$.*

Dimostrazione

1) $$((2((2x)' + x)')' + ((2x)' + x)')' =$$
$$= (((2x)' + x + (2x)' + x)' + (2x)' + x)' = ((2x)' + x)'$$

2) $$x' + y = (2x)' + x + ((2y)' + y)' = (2y)' + x + ((2y)' + y)' =$$
$$= y' + x + (2y + y') = y' + x,$$

ma

$$y' + x = (y' + x) \vee (y' + x) =$$
$$= (y' + x) \vee (x' + y) = 1$$

(cfr. [3], § 3), cioè $x = y$.

(2) Si può infatti facilmente dedurre $\vdash_{t_3} 3x = 2x$.

Dimostrazione (Proposizione 1.3.1.). Definiamo una applicazione ψ da A in $\bar{A}$ come segue: se $z \in A$, $\psi(z) = (2(2z)' + z)', 2z)$. Chiaramente $2((2z)' + z)' \leq 2z$. La ψ conserva le operazioni:

$\psi(x') = (2((2x')' + x')', 2x') = (2((2x)' + x)', (2x)' + 2((2x)' + x)')$ [3] $=$
$= (2((2x)' + x)', 2x)' = (\psi(x))'$. Analogamente per la somma. La ψ è iniettiva. Infatti sia $\psi(z_1) = \psi(z_2)$; allora $2z_1 = 2z_2$ e $2((2z_1)' + z_1)' =$
$= 2((2z_2)' + z_2)'$. Per il Lemma 1.3.2 l'ultima uguaglianza ci dà $((2z_1)' + z_1)' =$
$= ((2z_2)' + z_2)'$. Allora $z_1 = (z_1')' = (z_1' + (2z_1 + z_1')')' = ((2z_1)' + ((2z_1)' + z_1)')' =$
$= ((2z_2)' + ((2z_2)' + z_2)')' = (z_2' + (2z_2 + z_2')')' = z_2$.

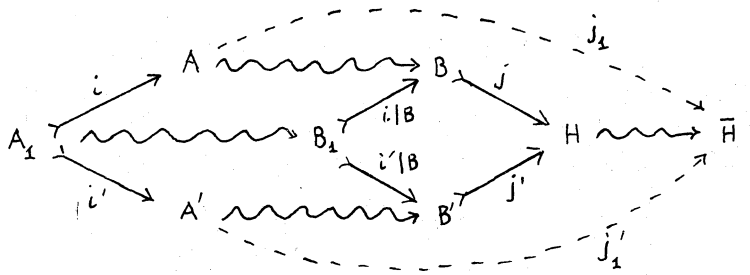
La dimostrazione è così completata.

2. Model completamento di $Ł_3$.

2.1. Teorema 2.1.1. *La teoria $Ł_3$ ha la proprietà di amalgamazione.*

Dimostrazione. Siano A_1, A, A' modelli di $Ł_3$ e i, i' due immersioni di A_1 rispettivamente in A e A'. Siano B_1, B e B' le algebre di Boole fondamentali rispettivamente di A_1, A, A'. Le restrizioni di i e i' a B_1 danno due immersioni di B_1 in B e B'. Sia H un'algebra di Boole che amalgama B e B' e siano j e j' le immersioni di B e B' in H.

Sia $\bar{H}$ la $Ł_3$–algebra associata ad H. $\bar{H}$ amalgama A e A'. Si ha infatti:



dove $j_1(x) = (j(2((2x)' + x)'), j(2x))$ e $j_1'(x) = (j'(2((2x)' + x)'), j'(2x))$.

Corollario 2.1.2. *$Ł_3$ ha model completamento.*

(3) Infatti si ha:

$$(2x)' + 2((2x)' + x)' = (2x)' + ((2x)' + x)' + ((2x)' + x)' =$$
$$= x' + (2x + x')' + ((2x)' + x)' = x' + ((2x)' + x)';$$

inoltre

$$(x' + ((2x)' + x)' + x' + x' = (x + (2x)' + x)' + (2x)' + x + x' = 1;$$
$$(x' + x')' + x'((2x)' + x)' = (2x)' + x + ((2x)' + x)' = 1$$

e quindi

$$2x' = x' + ((2x)' + x)'.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dai risultati di [2] per algebre quasi primali e per il Teorema 2.1.1. Lo stesso risultato si ottiene mediante un teorema di Morley–Waught [1] utilizzando i Teoremi 1.2.1 e 2.1.1.

Da tale teorema si ha anche che il model completamento è $\aleph_0$–categorico.

2.2. LEMMA 2.2.1. *In ogni* $Ł_3$*–algebra valgono i seguenti*:

i) *se* x *è idempotente* $x \wedge y = x \cdot y$;

ii) *se* x *è idempotente e* $\frac{1}{2}$ *è la soluzione dell'equazione* $x = x'$ *allora* $2\,(\frac{1}{2} \cdot x') = 2\,(x + \frac{1}{2})' = x'$;

iii) *se* x *è invariante e* y *è idempotente e* $(2x) \cdot y = 0$ *allora l'invariante di* $x + y$ *è* x.

Dimostrazione.

i) Basta dimostrare che $((y + x')' + x')' \leq (x' + y')'$. Infatti:

$$(y + x')' + x' + (x' + y')' = (y + x')' + x' + x' + (x' + y')' =$$
$$= (y + x')' + x' + y + (x + y)' = 1 ;$$

ii) $$\tfrac{1}{2} \cdot x' + \tfrac{1}{2} \cdot x' + x = (x + \tfrac{1}{2})' + (\tfrac{1}{2} \wedge x') + x = (x + \tfrac{1}{2})' + (x + \tfrac{1}{2}) = 1$$
$$(x + \tfrac{1}{2})' \wedge x = (x + \tfrac{1}{2})' \cdot x = (x + \tfrac{1}{2} + x')' = 0$$

quindi

$$2\,(x + \tfrac{1}{2})' \wedge 2x = 2\,(x + \tfrac{1}{2})' \wedge x = 0 ;$$

iii) $$((2\,(x + y))' + x + y') = ((2x + y)' + y + x)' =$$
$$= (((2x)' + y')' + (2x)' + x)' =$$
$$= ((2x) \cdot y + (2x)' + x)' = ((2x)' + x)' = x.$$

TEOREMA 2.2.2. *Sia* $\mathcal{A}$ *una* $Ł_3$*–algebra che ammette soluzione per l'equazione* $x = x'$. *Sia* $\mathcal{B}$ *la sua algebra di Boole fondamentale e sia* $\overline{\mathcal{A}}$ *la* $Ł_3$*–algebra associata a* $\mathcal{B}$. *Allora* $\mathcal{A}$ *è isomorfa a* $\overline{\mathcal{A}}$. *(In altre parole comunque presi due elementi* $x, y \in \mathcal{B}$ *con* $x \leq y$ *esiste sempre uno ed un solo* $z \in \mathcal{A}$ *che soddisfa il sistema*:

$$\begin{cases} x = 2\,((2z)' + z)' \\ y = 2z. \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $z = (x' + \frac{1}{2})' + (y' + 2\,(x' + \frac{1}{2})')'$. Osserviamo innanzi tutto che $(x' + \frac{1}{2})'$ è invariante. Infatti:

$$((2\,(x' + \tfrac{1}{2})')' + (x' + \tfrac{1}{2})')' = ((x' + \tfrac{1}{2} + x' + \tfrac{1}{2})' + x' + \tfrac{1}{2})' = (x' + \tfrac{1}{2})'.$$

Inoltre

$$(2\,(x'+\tfrac{\bar{1}}{2})')\wedge(y'+2\,(x'+\tfrac{\bar{1}}{2})')' = (2\,(x'+\tfrac{\bar{1}}{2})')\cdot(y'+2\,(x'+\tfrac{\bar{1}}{2})')' = 0$$

quindi per iii) del Lemma precedente l'invariante di z è $(x'+\frac{\bar{1}}{2})'$.

Per ii) allora si ha che $2\,((2\,z)'+z)' = x$. Infine:

$$2z = 2\,(x'+\tfrac{\bar{1}}{2})' + 2\,(y'+2\,(x'+\tfrac{\bar{1}}{2})')' = x + 2\,(y'+x) = x + 2\,(x'\wedge y) =$$

$$= x + x'\wedge y + x'\wedge y = (x+x')\wedge(x+y) + x'\wedge y = x + y + x'\wedge y = y.$$

Il teorema è così dimostrato.

Sia $\exists x_1 \cdots \exists x_n\, \varphi\,(x_1, \cdots, x_n, \bar{z})$ una formula esistenziale nel linguaggio $\mathscr{L}$ con $\bar{z}$ variabili libere. È evidente che tale formula può essere trasformata in una del linguaggio delle algebre di Boole del tipo:

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \exists y_1 \cdots \exists y_n (x_1 \leq y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \leq y_n \wedge \overline{\varphi}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

dove $\overline{\varphi}$ è ottenuta da φ sostituendo le operazioni $+$ e $'$ con le corrispondenti operazioni definite per le coppie del § 1.3.

Si ha allora:

COROLLARIO 2.2.3. *Nelle ipotesi del Teorema 2.2.2*

$$A \models \exists x_1 \cdots \exists x_n\, \varphi\,(x_1, \cdots, x_n, \bar{m})$$

sse

$$B \models \exists x_1 \cdots \exists x_n\, \exists y_1 \cdots \exists y_n (x_1 \leq y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \leq$$

$$\leq y_n \wedge \overline{\varphi}\,(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, \pi_1(\psi\,\bar{m})), \pi_2(\psi\,(\bar{m})),$$

ove ψ *è l'applicazione definita nella Proposizione 1.3.1 e* π_i $i = 1, 2$ *è la proiezione della i-esima coordinata.*

LEMMA 2.2.4. *Sia* $\mathscr{A}$ *una* $Ł_3$*-algebra che soddisfa* $\exists x\,(x = x')$. *Allora esiste una corrispondenza biunivoca fra gli elementi dell'algebra di Boole fondamentale di* $\mathscr{A}$ *e gli elementi invarianti di* $\mathscr{A}$ *che conserva l'ordine.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathscr{A}$ un elemento invariante; definiamo $\varphi : x \to 2\,x \in \mathscr{B}$.

Viceversa se $y \in \mathscr{B}$, $\varphi^{-1} : y \to (y' + \frac{\bar{1}}{2})$. Si ha infatti immediatamente dai lemmi precedenti che $\varphi^{-1}(\varphi\,(x)) = x$ se x è invariante.

Segue banalmente anche che φ conserva l'ordine.

LEMMA 2.2.5. *Sia* $\mathscr{A}$ *una* $Ł_3$*-algebra che soddisfa* $\exists x\,(x = x')$. *Allora* $\mathscr{A}$ *è priva di atomi sse* $\mathscr{B}$ *è priva di atomi.*

Dimostrazione. Basta osservare che un atomo di $\mathscr{A}$ deve essere invariante. Infatti si ha sempre $(x' + \frac{\bar{1}}{2})' \leq x$. L'asserto segue quindi dal lemma precedente.

TEOREMA 2.2.6. *Sia* $\mathscr{A}$ *una* $Ł_3$*-algebra priva di atomi che ammette soluzione all'equazione* $x = x'$ *Allora* $\mathscr{A}$ *è esistenzialmente chiusa.*

Dimostrazioni. Sia $\mathscr{A}'$ una $Ł_3$–algebra con

$$\mathscr{A} \to \mathscr{A}' \quad \text{e} \quad \exists x_1, \cdots, \exists x_x \varphi(x_1, \cdots, x_n, \bar{m})$$

una formula esistenziale a parametri in A, vera in $\mathscr{A}'$. Allora se $\mathscr{B}'$ è l'algebra di Boole fondamentale di $\mathscr{A}'$ e $\mathscr{B}$ quella di $\mathscr{A}$, si ha che

$$\mathscr{B}' \vDash \exists x_1 \cdots \exists x_n \exists y_1 \cdots \exists y_n (x_1 \leq y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \leq$$

$$\leq y_n \wedge \overline{\varphi}(x_1, \cdots, x_n, y_1 \cdots, y_n, \pi_1(\psi(\bar{m})), \pi_2(\psi(\bar{m}))).$$

e poiché $\mathscr{B}$ è esistenzialmente chiuso

$$\mathscr{B} \vDash \exists x_1 \cdots \exists x_n \exists y_1 \cdots \exists y_n (x_1 \leq y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \leq$$

$$\leq y_n \wedge \overline{\varphi}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, \pi_1(\psi(\bar{m})), \pi_2(\psi(\bar{m}))).$$

Ma per il Corollario 2.2.3 si ha che $\mathscr{A} \vDash \exists x_1 \cdots \exists x_n \varphi(x_1, \cdots, x_n, \bar{m})$.

COROLLARIO 2.2.7. *La teoria* $Ł_3$ *con l'aggiunta dei seguenti assiomi*:

1) $\exists x (x = x')$

2) $\forall x (x \neq 0 \to \exists y (y \neq 0 \wedge y \neq x \wedge y \leq x)$

è il model completamento di $Ł_3$.

Dimostrazione. Immediata dal Teorema 2.2.6 e da noti risultati (cfr. [5]).

OSSERVAZIONE 2. L'unico modello $\mathscr{A}$ del model completamento, in cardinalità $\aleph_0$ non coincide, in questo caso, come per le algebre di Boole, con l'algebra libera su un'infinità numerabile di generatori. Infatti ogni immagine omomorfa di $\mathscr{A}$ deve contenere $\frac{1}{2}$ e quindi la stessa algebra di Boole fondamentale non può essere immagine omomorfa di $\mathscr{A}$.

OSSERVAZIONE 3. Salvo una maggiore complicazione nelle definizioni e nei calcoli, tutti i risultati ottenuti per le $Ł_3$–algebra possono essere generalizzati per le $Ł_{n+1}$–algebre. Naturalmente l'assioma 1) per il model completamento sarà sostituito da 1') $\exists x ((n - 1) x = x')$.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. D. BACSICH (1973) – *Primality and model-completions*, « Algebra Universalis », *3* (3).

[2] S. BURRIS e H. WERNER (1975) – *Sheaf constructions and their elementary properties*, I, II, « Technische Hochschule Darmstadt », Preprint n. 230, Ottobre.

[3] C. C. CHANG (1958) – *Algebraic analysis of many valued logics*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *88*, 467–490.

[4] C. C. CHANG (1959) – *A new proof of the completenesss of the Lukasiewicz axioms*, «Trans. Amer. Math. Soc.», *93*, 74–80.

[5] J. HIRSCHFELD e W. WHEELER (1975) – *Forcing, Arithmetic, Division Rings*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.

[6] P. MANGANI (1973) – *Su certe algebre connesse con logiche a più valori*, « Bollettino U.M.I. » (4), *8*, 68–78.

[7] A. ROSE e J. B. ROSSER (1958) – *Fragments of many valued statement calculi*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *87*, 1–53.

[8] D. SAELI – *Problemi di decisione per algebre connesse a logiche a più valori* (in corso di stampa).