
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

RENZO MAZZOCCO

**Sull'anello caratteristico di estensioni di algebre di
Lie**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 60 (1976), n.3, p. 240–244.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_3_240_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Topologia algebrica. — *Sull'anello caratteristico di estensioni di algebre di Lie.* Nota di RENZO MAZZOCCO (*), presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — For any Lie algebra extension, satisfying suitable conditions, a simple method for the construction of "constant invariant" forms of all degrees (and hence for the construction of characteristic classes of all even dimensions) is given. Taking a Lie algebra extension, associated with a smooth real vector bundle, one obtains a well known system of generators of the classical characteristic ring of the vector bundle.

1. INTRODUZIONE

Sia $\mathcal{E}: 0 \rightarrow H \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\pi} T \rightarrow 0$ un'estensione di algebre di Lie, con H, P, T algebre di Lie su un anello commutativo R con unità nonchè moduli su una R -algebra commutativa F con unità e soddisfacenti ad opportune altre condizioni (ved. [5], p. 499). In [5] N. Teleman ha introdotto per ogni $\mathcal{E}$ siffatta le nozioni di connessione, curvatura e di algebra $I_F^*(H, F)$ di forme cosiddette « invarianti costanti » usando le quali egli costruisce un sistema di elementi della coomologia $\mathcal{H}_F^*(T, F)$, indipendente dalla connessione, chiamato anello caratteristico di $\mathcal{E}$.

Sempre in [5] è provato poi che se $\mathcal{E} = \mathcal{E}(E)$ è associata (nel senso che sarà ricordato al n. 3.1) ad un fibrato vettoriale reale o complesso E dotato di connessione, allora l'algebra delle forme « invarianti costanti » coincide con l'algebra delle forme invarianti nel senso di S. S. Chern e A. Weil e quindi l'anello caratteristico di $\mathcal{E}$ coincide con l'anello caratteristico del fibrato vettoriale E .

Ora si sa che l'anello caratteristico di Chern e Weil di un fibrato vettoriale reale o complesso ammette come base le classi di Pontrjagin o rispettivamente di Chern che, come noto (ved. per esempio [2], Cap. XII), si possono costruire tramite la curvatura usando opportunamente la funzione determinante.

È altresì noto che tale anello caratteristico ammette come sistema di generatori le classi di coomologia ottenute applicando la funzione traccia alle potenze esterne della curvatura (per il caso complesso, ved. per esempio [4], p. 761-762).

Ebbene, scopo della presente Nota è quello di dare anche per le estensioni di algebra di Lie $\mathcal{E}$, nell'ipotesi che il nucleo H abbia un'opportuna

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 marzo 1976.

struttura di algebra di Lie (n. 2.1), un procedimento per la costruzione di sistemi di classi caratteristiche.

Si prova poi che il procedimento trovato applicato al caso di $\mathcal{E} = \mathcal{E}(E)$ con E fibrato vettoriale reale, dà (a meno di fattori moltiplicativi costanti), il sistema di generatori dell'anello caratteristico di E ottenuti applicando la funzione traccia alle potenze esterne della curvatura.

2. COSTRUZIONE DI SISTEMI DI CLASSI CARATTERISTICHE DI ESTENSIONI DI ALGEBRE DI LIE

2.1. Sia $\mathcal{E}: 0 \rightarrow H \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\pi} T \rightarrow 0$ un'estensione di algebre di Lie come precisato al n. 1. Supponiamo inoltre che il *nucleo* H di $\mathcal{E}$ sia un'algebra associativa su F e che, indicato con $h_1 \times h_2$ il prodotto di due elementi h_1, h_2 in tale algebra, la struttura in H di algebra di Lie su R (ed anzi su F) risulti definita mediante il prototipo *crochet*:

$$(2.1.1) \quad [h_1, h_2] = h_1 \times h_2 - h_2 \times h_1.$$

Infine, identificando H con $\iota(H) \subset P$, supponiamo che risulti:

$$(2.1.2) \quad [p, h_1 \times h_2] = [p, h_1] \times h_2 + h_1 \times [p, h_2], \quad \forall p \in P \quad \text{e} \quad \forall h_1, h_2 \in H,$$

donde si trae in generale:

$$(2.1.3) \quad [p, h_1 \times \cdots \times h_n] = \sum_1^n h_1 \times \cdots \times [p, h_\alpha] \times \cdots \times h_n.$$

Le condizioni suddette sono soddisfatte dalle estensioni di algebre di Lie $\mathcal{E} = \mathcal{E}(E)$ associate ad un fibrato vettoriale E (cfr. n. 1 e n. 3.1).

2.2. Ricordiamo da [5], p. 502, che dicesi *forma «invariante costante» di grado n su H* ogni forma (F, n) -lineare $\varphi: H^n \rightarrow F$ soddisfacente alla condizione:

$$(2.2.1) \quad \pi(p) \varphi(h_1, \dots, h_n) = \sum_1^n \varphi(h_1, \dots, [p, h_\alpha], \dots, h_n),$$

$$\forall p \in P \quad \text{e} \quad \forall (h_1, \dots, h_n) \in H^n.$$

Il prodotto a primo membro di (2.2.1) ha senso perchè $\pi(p) \in T$, $\varphi(h_1, \dots, h_n) \in F$ e nella definizione di $\mathcal{E}$ si suppone, tra l'altro, che F è T -modulo (cfr. [5], p. 499).

Ricordiamo anche che, definendo opportunamente il prodotto di due forme «invarianti costanti», l'insieme $I_F^*(H, F) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_F^n(H, F)$, dove $I_F^n(H, F)$ è l'insieme di tutte le forme «invarianti costanti» di grado n su H , acquista una struttura di algebra su R ([5], p. 502).

Sia ora $\mathcal{E}$ un'estensione di algebre di Lie soddisfacente alle condizioni del n. 2.1 e $\psi: H \rightarrow F$ una qualunque forma invariante costante di grado 1. Ebbene considerata, per ogni numero naturale n , l'applicazione $\psi_n: H^n \rightarrow F$ definita da:

$$(2.2.2) \quad \psi_n(h_1, \dots, h_n) = \psi(h_1 \times \dots \times h_n), \quad \forall (h_1, \dots, h_n) \in H^n,$$

dimostriamo il

(2.2.3) TEOREMA. *L'applicazione $\psi_n: H^n \rightarrow F$ è una forma invariante costante di grado n ($\psi_n \in I_F^n(H, F)$).*

Dimostrazione. La (F, n) -linearità di ψ_n consegue immediatamente dalla definizione (2.2.2) tenute presenti la bilinearità del prodotto che dà ad H la struttura di algebra associativa su F e la $(F, 1)$ -linearità di ψ .

Resta dunque da provare che la ψ_n soddisfa alla (2.2.1). Ora $\forall p \in P$ e $\forall (h_1, \dots, h_n) \in H^n$, grazie alla (2.2.2) e alla linearità di ψ , si ha

$$\begin{aligned} \sum_1^n \alpha \psi_n(h_1, \dots, [p, h_\alpha], \dots, h_n) &= \sum_1^n \alpha \psi(h_1 \times \dots \times [p, h_\alpha] \times \dots \times h_n) = \\ &= \psi\left(\sum_1^n \alpha h_1 \times \dots \times [p, h_\alpha] \times \dots \times h_n\right). \end{aligned}$$

Quindi applicando la (2.1.3), segue che

$$\sum_1^n \alpha \psi_n(h_1, \dots, [p, h_\alpha], \dots, h_n) = \psi([p, h_1 \times \dots \times h_n]),$$

ma ψ è «invariante costante», cosicchè risulta

$$\sum_1^n \alpha \psi_n(h_1, \dots, [p, h_\alpha], \dots, h_n) = \pi(p) \psi(h_1 \times \dots \times h_n) = \pi(p) \psi_n(h_1, \dots, h_n),$$

donde la conclusione.

2.3. Ricordiamo ora da [5], p. 502-506, che se $\Omega_\nabla: T^2 \rightarrow H$ è la curvatura «basica» di una connessione $\nabla: T \rightarrow P$ per un'estensione di algebre di Lie $\mathcal{E}$ e se $R \ni 1/n, \forall n \in \mathbb{N}$, allora $\forall \varphi \in I_F^m(H, F)$ la classe di coomologia $[\varphi(\Omega_\nabla)] \in \mathcal{H}_F^{2m}(T, F)$ definita ponendo:

$$(2.3.1) \quad (\varphi(\Omega_\nabla))(t_1, \dots, t_{2m}) = \varphi(\pi^*(\Omega_\nabla), \dots, \pi^*(\Omega_\nabla))(\nabla t_1, \dots, \nabla t_{2m}), \\ \forall (t_1, \dots, t_{2m}) \in T^{2m},$$

è indipendente dalla connessione; $[\varphi(\Omega_\nabla)]$ è una *classe caratteristica* di $\mathcal{E}$ e l'insieme $\{[\varphi(\Omega_\nabla)] \mid \varphi \in I_F^*(H, F)\} \subset \mathcal{H}_F^*(T, F)$ è l'*anello caratteristico* di $\mathcal{E}$.

Ciò ricordato, dal Teorema (2.2.3) discende senz'altro il

(2.3.2). TEOREMA. *Se $\mathcal{E}$ soddisfa alle condizioni del n. 2.1 e se inoltre $R \ni 1/n, \forall n \in \mathbb{N}$, allora in corrispondenza ad ogni forma «invariante costante» di grado 1 su H si ha il sistema di classi caratteristiche di tutte le dimensioni (pari):*

$$\{\psi_n(\Omega_\nabla) \in \mathcal{H}_F^{2n}(T, F)\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

3. APPLICAZIONE ALLE ESTENSIONI DI ALGEBRE DI LIE ASSOCIATE AI FIBRATI VETTORIALI REALI

3.1. Sia ora $\mathcal{E} = \mathcal{E}(E)$ un'estensione di algebre di Lie associata al fibrato vettoriale reale E . S'intende con ciò che $\mathcal{E}$ sia data dalla successione esatta: $0 \rightarrow C^\infty(X, \text{Hom}(E, E)) \xrightarrow{1} P \xrightarrow{\pi} C^\infty(X, T(X)) \rightarrow 0$, dove X è una varietà differenziabile base del fibrato E , P è l'algebra di Lie dei campi tangenti invarianti a destra sul fibrato principale $P(E)$ e $T(X)$ è il fibrato tangente su X . S'intende inoltre di assumere $R = \mathbf{R}$, $F = C^\infty(X, \mathbf{R})$.

Abbiamo già detto che tale estensione di algebre di Lie soddisfa alle condizioni del n. 2.1 e quindi è applicabile ad essa il procedimento dato ai n. 2.2 e 2.3 per la costruzione di classi caratteristiche.

Stabiliamo il

(3.1.1) TEOREMA. *Se X è connessa, allora le classi caratteristiche di $\mathcal{E}(E)$ coincidono, a meno di fattori moltiplicativi costanti, con le classi caratteristiche del fibrato E ottenute applicando la funzione traccia alle potenze esterne della curvatura di E .*

3.2. Per dimostrare (3.1.1) premettiamo il seguente

(3.2.1) LEMMA. *Se X è connessa, condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione $\psi: H = C^\infty(X, \text{Hom}(E, E)) \rightarrow F = C^\infty(X, \mathbf{R})$ sia una forma «invariante costante» (di grado 1) è che risulti $\psi = r \text{Tr}$, $r \in \mathbf{R}$.*

Dimostrazione del Lemma (3.2.1). Sufficienza:

È noto che la funzione traccia $\text{Tr}: C^\infty(X, \text{Hom}(E, E)) \rightarrow C^\infty(X, \mathbf{R})$ è una forma invariante nel senso di S. S. Chern e A. Weil e quindi per la Proposizione 15 di [5], è una forma «invariante costante» di grado 1. Allora, se $r \in \mathbf{R}$, anche $r \text{Tr}$ è tale.

Necessità. Essendo $\psi: C^\infty(X, \text{Hom}(E, E)) \rightarrow C^\infty(X, \mathbf{R})$ $(F, 1)$ -lineare esiste una funzione (di classe C^∞) $\bar{\psi}: \text{Hom}(E, E) \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $(\psi(h))(x) = \bar{\psi}(h(x))$, $\forall h \in C^\infty(X, \text{Hom}(E, E))$ e $\forall x \in X$. Sia $\bar{\psi}_x = \bar{\psi}|_{\text{Hom}(E_x, E_x)}$, dove E_x è la fibra di E su $x \in X$, ovviamente $\bar{\psi}_x$ è $(\mathbf{R}, 1)$ -lineare. Se $h_1, h_2 \in C^\infty(X, \text{Hom}(E, E))$ sono due sezioni qualunque, dalla condizione (2.2.1), mettendo per esempio h_1 al posto di p , si trae $0 = \psi([h_1, h_2])$ e quindi $0 = (\psi([h_1, h_2]))(x) = \bar{\psi}_x([h_1, h_2](x)) = \bar{\psi}_x([h_1(x), h_2(x)])$, $\forall x \in X$.

Siccome $h_1(x), h_2(x)$ sono due elementi qualsiasi di $\text{Hom}(E_x, E_x)$ risulta allora che $\bar{\psi}_x$ soddisfa alla proprietà caratteristica della funzione traccia⁽¹⁾ onde $\bar{\psi}_x = f(x) \text{Tr}$, $f(x) \in \mathbf{R}$, e di conseguenza $\psi(h) = (f \text{Tr}) \circ h = (f \text{Tr})(h)$; cioè $\psi = f \text{Tr}$, essendo f una funzione reale su X .

(1) Ricordiamo (cfr. per esempio [1], p. 48-50) che, se $M_n(\mathbf{R})$ è l'algebra delle matrici quadrate di ordine n su $\mathbf{R}$ e se $\varphi: M_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ è lineare e soddisfa alla $\varphi(AB) = \varphi(BA)$, $\forall A, B \in M_n(\mathbf{R})$ o, equivalentemente, soddisfa alla $\varphi([A, B]) = 0$, allora $\varphi = r \text{Tr}$, $r \in \mathbf{R}$.

Se $I \in C^\infty(X, \text{Hom}(E, E))$ è la sezione costituita dagli endomorfismi identità si ha

$$\psi(I) = f \text{Tr}(I) = nf \in F, \quad n = \text{rango di } E,$$

e dunque f è una funzione differenziabile di classe C^∞ . Se $p \in P$ e I è la sezione suddetta, dalla (2.1.2) si ha $[p, I] = 0$, onde applicando la (2.2.1) si trae

$$\pi(p) \psi(I) = \psi([p, I]) = 0 \quad \text{cioè} \quad \pi(p)(nf) = 0,$$

ma π è un epimorfismo e quindi la funzione f è localmente costante e dunque costante avendo supposto X connessa, donde la conclusione.

Dimostrazione del Teorema (3.1.1). Sia Ω_Γ la curvatura di una connessione lineare Γ per il fibrato vettoriale E . Per la Proposizione 14 di [5] esiste una connessione $\bar{\Gamma}$ per l'estensione di algebre di Lie $\mathcal{E}(E)$ tale che $\Omega_{\bar{\Gamma}} = \Omega_\Gamma$. Allora, stante il Lemma (3.2.1), $\forall \psi$, forma invariante costante di grado 1, si ha $\psi = r \text{Tr}$, e la forma invariante costante di grado n , ψ_n , che ne deriva in base a (2.2.2, 2.2.3), applicata a $\Omega_{\bar{\Gamma}} = \Omega_\Gamma$ (cfr. la 2.3.1), dà (a meno del fattore r) la traccia della potenza esterna n -ma di Ω_Γ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI (1958) - *Algèbre*, Chap, 3, § 5, Hermann, Paris.
- [2] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU (1969) - *Foundations of differential geometry*, vol. II, Interscience Publishers.
- [3] R. MAZZOCCO (1974) - *Sulle estensioni di algebre di Lie*, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei» (8), 907-914.
- [4] N. TELEMANN (1966) - *Una definizione geometrica di alcune forme di André Weil che si possono associare ad una connessione infinitesimale*, «St. Cerc. Mat.», 18, (5), 753-762, Bucureşti.
- [5] N. TELEMANN (1972) - *A characteristic ring of a Lie algebra extension*, Note I e II, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei» (8), 52, 498-506 e 708-711.