ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MAURIZIO FATTOROSI-BARNABA

Sulle topologie compatibili con una data algebra

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 60 (1976), n.3, p. 228–234.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_3_228_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Topologia. — *Sulle topologie compatibili con una data algebra.*

Nota di MAURIZIO FATTOROSI-BARNABA (*), presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We call a topology T on a set A *compatible* with a given algebra $\mathfrak{A} = \langle A; F \rangle$ iff all the operations of F are continuous with respect to T in the natural sense. We give a necessary condition for compatibility, we show its insufficiency by a counterexample and we exhibit some examples for which sufficiency holds. Furthermore we make two observations, one consisting in a characterization of the discrete and indiscrete topologies with respect to compatibility, and the other consisting in an algebraic expression of a particular case of a compatible topology, whose importance in classical theories (for example, topological groups) is well-known.

I. PRELIMINARI

Salvo leggere modifiche si adottano le notazioni di [4], che sono una variante di quelle di [6]. Le topologie, salvo avviso in contrario, verranno pensate come topologie di chiusi; la chiusura in una topologia T si indicherà con K_T e, per semplicità, si scriverà aK_T invece di $\{a\}K_T$. È ovvio che, comunque si prendano due topologie T e T' su di un insieme A , si ha

$$(1) \quad T \subseteq T' \quad \text{sse} \quad K_T \geq K_{T'}.$$

L'insieme delle topologie su di un insieme A si indicherà con $\mathcal{T}_A$; la topologia discreta e quella indiscreta su A verranno indicate rispettivamente con D_A e I_A .

Una topologia T su un insieme A , sostegno di un'algebra $\mathfrak{A} = \langle A; F \rangle$ di tipo τ si dirà $\mathfrak{A}$ -compatibile (o anche F -compatibile quando non si possa equivocare sull'insieme A), se le operazioni (finitarie) di F sono continue rispetto a T : con ciò si intende, come di consueto, che, se $f_\gamma \in F(n_\gamma)$ ($\gamma < o(\tau)$), allora f_γ è una funzione continua dall'insieme A^{n_γ} , dotato della topologia potenza $T^{(n_\gamma)}$, all'insieme A dotato della topologia T .

Per topologie per le quali unioni di famiglie qualsiasi di chiusi sono un chiuso, la compatibilità fra $\mathfrak{A}$ e T equivale a dire che, per ogni $X_i \subseteq A$ ($0 \leq i < n_\gamma$) ed ogni $\gamma < o(\tau)$, si ha

$$(2) \quad (X_0 K_T) \times \cdots \times (X_{n_\gamma-1} K_T) (f_\gamma)_* \subseteq [X_0 \times \cdots \times X_{n_\gamma-1} (f_\gamma)_*] K_T.$$

Tali topologie verranno dette brevemente *rc* (= reticolarmente complete) in quanto subreticoli completi di $\langle 2^A; \subseteq \rangle$, e l'insieme di esse verrà indicato con $\mathcal{T}_A^{rc}$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A.-C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 marzo 1976.

Fissata un'algebra $\mathfrak{A}$, l'insieme delle topologie $\mathfrak{A}$ -compatibili verrà indicato con $\mathcal{T}_{\mathfrak{A}}$.

Richiamiamo alcune altre nozioni già note (vedi per esempio [2] e [7]). Ad ogni equivalenza Φ su un insieme A , resta associato un operatore di chiusura K_{Φ} su A definito da

$$(3) \quad XK_{\Phi} = X^{\Phi} = \bigcup \{x^{\Phi} : x \in X\}$$

che gode delle proprietà di un operatore di Kuratowski, e che quindi definisce una topologia T_{Φ} su A ; questa risulta essere una topologia di clopen (in cui cioè tutti gli « aperti » sono in realtà clopen) che, in quanto topologia di aperti, ha come base A/Φ : il relativo operatore di chiusura, che per coerenza dovremmo indicare con $K_{T_{\Phi}}$, continuerà ad essere indicato con K_{Φ} . È immediato verificare che, per ogni $\Phi, \Psi \in \mathcal{E}(A)$,

$$(4) \quad \Phi \subseteq \Psi \quad \text{sse} \quad T_{\Phi} \supseteq T_{\Psi} \quad \text{sse} \quad K_{\Phi} \leq K_{\Psi}.$$

L'insieme delle topologie di equivalenza (cioè delle topologie del tipo T_{Φ}) su A verrà indicato con $\mathcal{T}_A^e$: ovviamente $\mathcal{T}_A^e \subseteq \mathcal{T}_A^{rc}$ e l'inclusione è in generale propria, come si può vedere con facili esempi. Nel caso in cui A sostenga un'algebra $\mathfrak{A} = \langle A; F \rangle$ e $\Phi \in \mathcal{C}(\mathfrak{A})$, la T_{Φ} , essendo *rc*, soddisfa la (2) e quindi è $\mathfrak{A}$ -compatibile. Più in generale se $\mathcal{S} = \{\Phi_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{C}(\mathfrak{A})$ è una base di filtro (vedi per esempio [1]) su A^2 , la topologia $T_{\mathcal{S}}$ che, in quanto topologia di aperti ha come base $\bigcup \{A/\Phi_i : i \in I\}$ è $\mathfrak{A}$ -compatibile; risulta facilmente

$$(5) \quad T_{\mathcal{S}} = \bigvee \{T_{\Phi_i} : i \in I\},$$

dove l'unione si intende fatta nel reticolo delle topologie su A .

Data una topologia T su di un insieme A , ad essa resta associata un'equivalenza sulle parti di A (*equivalenza naturale di T su 2^A*)

$$(6) \quad \Phi_T = \{(X, Y) : XK_T = YK_T\} \in \mathcal{E}(2^A) \quad (X, Y \subseteq A)$$

ed una equivalenza su A (*equivalenza naturale di T su A*)

$$(7) \quad \Phi_T^* = \{(a, b) : aK_T = bK_T\} \in \mathcal{E}(A) \quad (a, b \in A).$$

Una verifica immediata mostra che $\Phi_{T_{\Phi}}^* = \Phi$, ovvero che la funzione

$$(8) \quad \begin{aligned} \langle \mathcal{E}(A); \subseteq \rangle &\rightarrow \langle \mathcal{T}_A^e; \subseteq \rangle \\ \Phi &\rightarrow T_{\Phi} \end{aligned}$$

è iniettiva e quindi, in virtù di (4), un antiisomorfismo d'ordine: si può anzi vedere che si tratta di un antiisomorfismo di reticoli, ma non di reticoli completi (v. [5]).

2. RISULTATI

Cominciamo con l'osservare il seguente

LEMMA. Sia $T \in \mathcal{C}_A$. Valgono le seguenti affermazioni:

- (i) $T \subseteq T_{\Phi_T^*} \cdot T = T_{\Phi_T^*}$ sse $T \in \mathcal{C}_A^0$.
- (ii) $T_{\Phi_T^*} = \cap \{T_\Phi : T \subseteq T_\Phi\}$.
- (iii) $\Phi_T^* = \vee \{\Phi : T \subseteq T_\Phi\}$.

Dimostrazione. (i) Dalla definizione di Φ_T^* segue subito che, per ogni $a \in A$, $a^{\Phi_T^*} \subseteq aK_T$ (l'inclusione può essere propria); se $X \in T$ allora

$$XK_{\Phi_T^*} = \cup \{x^{\Phi_T^*} : x \in X\} \subseteq \cup \{xK_T : x \in X\} \subseteq X$$

da cui segue $X = XK_{\Phi_T^*} \in T_{\Phi_T^*}$. La seconda affermazione segue dal fatto che $\Phi = \Phi_{T_\Phi}^*$.

(ii) Se $T \subseteq T_\Phi$ allora $aK_T \supseteq aK_\Phi = a^\Phi$, per ogni $a \in A$; ne segue

$$(a, b) \in \Phi \rightarrow b \in a^\Phi \subseteq aK_T \quad \text{e} \quad a \in b^\Phi \subseteq bK_T \rightarrow aK_T = bK_T \rightarrow (a, b) \in \Phi_T^*$$

cioè $\Phi \subseteq \Phi_T^*$ e quindi $T_\Phi \supseteq T_{\Phi_T^*}$: da questa osservazione e dalla (i) segue la (ii).

(iii) L'asserto equivale ad affermare che

$$T \subseteq T_\Phi \quad \text{sse} \quad \Phi_T^* \supseteq \Phi$$

e ciò segue immediatamente da (i) e dalla dimostrazione della (ii).

Se $\mathfrak{A} = \langle A; F \rangle$ è un'algebra sostenuta da A si può definire con naturalezza su 2^A una struttura d'algebra, isotipica a quella di $\mathfrak{A}$, definendo, per ogni $X_i \in 2^A$ ($0 \leq i < n_\gamma$)

$$X_0 \times \cdots \times X_{n_\gamma-1} f_\gamma = X_0 \times \cdots \times X_{n_\gamma-1} (f_\gamma)_* \quad (\gamma < 0(\tau)),$$

dove, per non appesantire le notazioni, con lo stesso simbolo f_γ si indica la « nuova » operazione su 2^A e la « vecchia » su A : il contesto e l'uso degli altri simboli eviteranno possibili ambiguità. L'algebra $2^{\mathfrak{A}} = \langle 2^A; F \rangle$ che ne risulta verrà detta *algebra isotipica delle parti di $\mathfrak{A}$* , per non generare equivoci con l'algebra booleana delle parti di $\mathfrak{A}$.

Dimostriamo ora una condizione necessaria per la compatibilità di una topologia T con una (fissata) algebra $\mathfrak{A}$:

TEOREMA I. Se $T \in \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ allora $\Phi_T \in \mathcal{C}(2^{\mathfrak{A}})$.

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$ con $\mathfrak{A}$ di tipo τ ; se $(X_i, Y_i) \in \Phi_T$ ($0 \leq i < n_\gamma$) e se $f_\gamma \in F(n_\gamma)$, ($\gamma < o(\tau)$), si ha

$$\begin{aligned} X_0 \times \cdots \times X_{n_\gamma-1} (f_\gamma)_* &\subseteq (X_0 K_T) \times \cdots \times (X_{n_\gamma-1} K_T) (f_\gamma)_* = \\ &= (Y_0 K_T) \times \cdots \times (Y_{n_\gamma-1} K_T) (f_\gamma)_* \subseteq [Y_0 \times \cdots \times Y_{n_\gamma-1} (f_\gamma)_*] K_T \end{aligned}$$

da cui segue

$$[X_0 \times \cdots \times X_{n_\gamma-1} (f_\gamma)_*] K_T \subseteq [Y_0 \times \cdots \times Y_{n_\gamma-1} (f_\gamma)_*] K_T;$$

scambiando i ruoli degli X_i e Y_i si ottiene l'inclusione inversa e quindi la tesi.

La condizione « $\Phi_T \in \mathcal{C}(2^{\mathfrak{A}})$ » non è tuttavia sufficiente per la $\mathfrak{A}$ -compatibilità della T , come mostra il seguente esempio (dovuto al dott. L. Mammone): sia $\mathfrak{A} = \langle R; \{+\} \rangle$, dove R è l'insieme dei numeri reali, e sia T la topologia (di chiusi) i cui elementi sono $\emptyset$, R ed ogni sottoinsieme di R inferiormente e superiormente limitato. Si vede facilmente che $\Phi_T \in \mathcal{C}(2^{\mathfrak{A}})$ ma che $+$ non è continua rispetto a T .

Mostriamo ora come, facendo ipotesi su T o sulle operazioni di $\mathfrak{A}$, si possa invertire il Teorema 1.

TEOREMA 2. *Se $T \in \mathcal{C}_A^e$ allora $\Phi_T \in \mathcal{C}(2^{\mathfrak{A}})$ implica $T \in \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$.*

Dimostrazione. Dal lemma segue che $T = T_{\Phi_T^*}$; se $\Phi_T \in \mathcal{C}(2^{\mathfrak{A}})$ è immediato constatare che $\Phi_T^* \in \mathcal{C}(\mathfrak{A})$, cioè T è una topologia di congruenza e quindi $\mathfrak{A}$ -compatibile.

Più in generale si ha

TEOREMA 3. *Se $T \in \mathcal{C}_A^{rc}$ allora $\Phi_T \in \mathcal{C}(2^{\mathfrak{A}})$ implica $T \in \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}$.*

Dimostrazione. Se $\Phi_T \in \mathcal{C}(2^{\mathfrak{A}})$ allora $\Phi_T^* \in \mathcal{C}(\mathfrak{A})$. Per la (i) del lemma, $T \subseteq T_{\Phi_T^*}$ e quindi $K_{\Phi_T^*} \subseteq K_T$. Data $f_\gamma \in F(n_\gamma)$ ($\gamma < o(\tau)$) e scelti comunque $X_i \subseteq A$ ($0 \leq i < n_\gamma$) si ha

$$X_i K_T \in T \subseteq T_{\Phi_T^*} \quad (0 \leq i < n_\gamma)$$

e quindi

$$X_i K_T = Y_i K_{\Phi_T^*} \quad (0 \leq i < n_\gamma)$$

per opportuni $Y_i \subseteq A$ ($0 \leq i < n_\gamma$). Per questi Y_i si ha $X_i K_T = Y_i K_T$, perchè

$$Y_i K_T \supseteq Y_i K_{\Phi_T^*} = X_i K_T$$

$$X_i K_T = Y_i K_{\Phi_T^*} \supseteq Y_i \rightarrow X_i K_T \supseteq Y_i K_T,$$

e quindi $(X_i, Y_i) \in \Phi_T$ ($0 \leq i < n_\gamma$); poichè $\Phi_T \in \mathcal{C}(2\mathfrak{A})$ si ha allora

$$\begin{aligned} [X_0 \times \cdots \times X_{n_\gamma-1} (f_\gamma)_*] K_T &= (X_0 \times \cdots \times X_{n_\gamma-1} f_\gamma) K_T = \\ &= (Y_0 \cdots Y_{n_\gamma-1} f_\gamma) K_T = [Y_0 \times \cdots \times Y_{n_\gamma-1} (f_\gamma)_*] K_T. \end{aligned}$$

Dal momento che $T_{\Phi_T^*}$, in quanto topologia di congruenza, è $\mathfrak{A}$ -compatibile, si ha in definitiva

$$\begin{aligned} (X_0 K_T) \times \cdots \times (X_{n_\gamma-1} K_T) (f_\gamma)_* &= (Y_0 K_{\Phi_T^*}) \times \cdots \times (Y_{n_\gamma-1} K_{\Phi_T^*}) (f_\gamma)_* \subseteq \\ &\subseteq [Y_0 \times \cdots \times Y_{n_\gamma-1} (f_\gamma)_*] K_{\Phi_T^*} \subseteq [Y_0 \times \cdots \times Y_{n_\gamma-1} (f_\gamma)_*] K_T = \\ &= [X_0 \times \cdots \times X_{n_\gamma-1} (f_\gamma)_*] K_T; \end{aligned}$$

vale perciò la (2), cioè T è $\mathfrak{A}$ -compatibile.

Citiamo infine un caso in cui il Teorema 1 si può invertire, facendo ipotesi non sulla topologia ma sulle operazioni dell'algebra: se $\mathfrak{A}$ è dotata di operazioni di arità al più 1, la continuità di tali operazioni si esprime tramite la (2) (ove si ponga $n_\gamma = 1$) e pertanto il risultato si ottiene con dimostrazione analoga a quella del Teorema 3.

3. OSSERVAZIONI

Una prima osservazione consiste nel fatto che, per ogni insieme di operazioni finitarie F su un dato insieme A , D_A e I_A sono F -compatibili. Di fatto D_A e I_A sono le *sole* topologie compatibili con ogni insieme di operazioni finitarie su A , ed anzi con ogni insieme di operazioni 1-arie su A , come segue dalla

PROPOSIZIONE. $T \in \mathcal{C}_A$ è A^A -compatibile sse $T = D_A$ o $T = I_A$.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare il «solo se». T sia A^A -compatibile e sia $T \neq I_A$: mostreremo che $T = D_A$ e di fatto che, per ogni $X \subseteq A$, si ha $XK_T = X$. Procedendo per assurdo, supponiamo invece che, per qualche $X \subseteq A$, si abbia $X \not\subseteq XK_T$: faremo vedere che esiste in ogni caso una $f \in A^A$ non continua rispetto a T . Sia

$$\mathcal{S} = \{ |X| : X \subseteq A \text{ e } X \not\subseteq XK_T \}$$

e, se $\mathcal{S} \neq \emptyset$, sia $\alpha = \min \mathcal{S}$. Ovviamente, quando è definito $\alpha \geq 1$ e se $\alpha > 1$ allora $\alpha \geq \mathfrak{N}_0$.

Se $\mathcal{S} \neq \emptyset$ allora $T = D_A$. Se $\mathcal{S} \neq \emptyset$ e $\alpha > 1$, sia $X \subseteq A$ tale che $|X| = \alpha$ e $X \not\subseteq XK_T$ e siano $x \in X$, $a \in XK_T - X$; la $f \in A^A$ definita da

$$yf = \begin{cases} a & \text{se } y \in X \\ x & \text{se } y \in XK_T - X \\ y & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è tale che

$$(XK_T)f_* = \{a, x\} \supseteq (Xf_*)K_T = aK_T = \{a\}$$

e quindi f non è continua rispetto a T .

Se poi $\mathcal{S} \neq \emptyset$ e $\alpha = I$, sia $a \in A$ tale che $aK_T - \{a\} \neq \emptyset$. Si distinguono due alternative:

a) Esiste un $b \in aK_T - \{a\}$ tale che $bK_T \subsetneq aK_T$: allora $f \in A^A$ definita da

$$yf = \begin{cases} b & \text{se } y = a \\ a & \text{se } y = b \\ y & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

è tale che

$$(aK_T)f_* = aK_T \supseteq (af)K_T = bK_T$$

e quindi f non è continua rispetto a T .

b) Per ogni $b \in aK_T$ si ha $aK_T = bK_T$; allora deve essere $A - aK_T \neq \emptyset$: infatti se fosse $A = aK_T$ allora, preso comunque $\emptyset \neq X \subseteq A = aK_T$ e un $x \in X$, si avrebbe $x \in aK_T$ e di conseguenza $xK_T = aK_T = A$; ne seguirebbe $A = xK_T \subseteq XK_T \subseteq A$, cioè $XK_T = A$ e quindi $T = I_A$ contro l'ipotesi. Sia dunque $x \in A - aK_T$ e sia $b \in aK_T - \{a\}$; la $f \in A^A$ definita da

$$yf = \begin{cases} b & \text{se } y = a \\ x & \text{se } y \in aK_T - \{a\} \\ y & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è tale che

$$(aK_T)f_* = \{b, x\} \not\subseteq (af)K_T = bK_T = aK_T$$

perchè $x \notin aK_T$; pertanto f non è continua rispetto a T .

COROLLARIO. $T \in \mathcal{C}_A$ è compatibile con ogni insieme di operazioni finitarie su A sse $T = D_A$ o $T = I_A$.

Una seconda osservazione nasce dall'esame del caso particolare che si presenta allorchè, rispetto ad una topologia T definita sul sostegno di un'algebra $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}$ -compatibile, le operazioni risultino continue e chiuse (ovvero trasformino chiusi in chiusi). In tal caso si ottiene una rappresentazione particolarmente semplice e significativa dell'algebra $2^{\mathfrak{A}}/\Phi_T$.

Si constata infatti immediatamente che $T \in \mathcal{S}(2^{\mathfrak{A}})$ e che, detta $\mathfrak{T} = (T; F)$ l'algebra (sottoalgebra di $2^{\mathfrak{A}}$) sostenuta da T si ha

$$2^{\mathfrak{A}}/\Phi_T \cong \mathfrak{T}$$

come segue dal secondo teorema d'isomorfismo, osservando che T è un trasversale per $2^{\mathfrak{A}}/\Phi_T$ (ovvero che $T^{\Phi_T} = 2^{\mathfrak{A}}$, $T^2 \cap \Phi_T = \Delta_T$), riprendendo la

terminologia di [3]. Ciò può anche provarsi tramite il teorema fondamentale d'omomorfismo osservando che

$$\begin{aligned} K_T: 2\mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{I} \\ X &\mapsto XK_T \end{aligned}$$

risulta un epimorfismo di algebre il cui nucleo è appunto Φ_T . Ricordiamo, concludendo, che questo tipo di situazione si presenta in importanti casi classici, come per esempio in quello dei gruppi topologici compatti la cui topologia sia T_0 o T_1 o T_2 (è noto che, per un gruppo topologico, ciascuna di queste tre condizioni è equivalente alle altre due; vedi per esempio [8] e [9]).

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI (1971) - *Topologie générale*, Hermann, 1971.
- [2] S. BULMAN-FLEMING (1971) - *Congruence topologies on universal algebras*, «Math. Z.», **119**, 287-289.
- [3] P. M. COHN (1965) - *Universal algebra*, Harper and Row, Trad. it.: Feltrinelli, 1971.
- [4] M. FATTOROSI-BARNABA (1973) - *Elementi di algebra universale*, Bizzarri.
- [5] M. FATTOROSI-BARNABA e L. MAMONE - *Alcune questioni reticolari concernenti certe classi di topologie* (in preparazione).
- [6] G. GRÄTZER (1968) - *Universal algebra*, D. van Nostrand Co.
- [7] W. HÄMISCH (1954) - *Über die Topologie in der Algebra*, «Math. Z.», **60**, 458-487.
- [8] T. HUSAIN (1966) - *Introduction to topological groups*, W. B. Saunders Co.
- [9] L. S. PONTRJAGIN (1939) - *Topological groups*, trad. ingl., Princeton University Press.