Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Santi Valenti, Maria Concetta Palacardo

Su di un metodo iterativo concernente funzioni speciali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.3, p. 213–218.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_3_213_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Equazioni funzionali. — *Su di un metodo iterativo concernente funzioni speciali.* Nota di SANTI VALENTI (*) e MARIA CONCETTA PALACARDO (**), presentata (***) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — A wide extension is given of the iterative method applied in [6] to the resolution of a remarkable class of functional equations. This stresses the possibility of dealing with characterizations of some special functions (e.g. the Euler's one) by means of a "fixed point theorem" approach. An application to the above function is shown at the end.

INTRODUZIONE

Con la presente Nota si intende mostrare che il principale risultato conseguito in [5] e [6] da uno di noi (S.V) e B. Albanese, a proposito dell'equazione funzionale

$$E_k\, t(x) = f(x)\, t(x)\,, \qquad k > 0\,, \tag{0.1}$$

(dove E_k è l'operatore di spostamento [4] relativo all'incremento k della variabile x ed $f(x)$ è il dato), riesce in effetti di portata notevolmente più ampia di quanto ivi possa apparire.

Precisamente, – rinviando per la nomenclatura e i richiami al secondo di detti lavori – dimostreremo come l'algoritmo $(f, k) - \Gamma$ introdotto in [6] possa estendersi sino a farne utile strumento per la risoluzione effettiva della (0.1) a partire da tutta una famiglia di «*funzioni d'innesco*», *riuscendo pur sempre valido un teorema di unicità per la soluzione di detta equazione.*

Sicchè, non essendo l'algoritmo vincolato all'assunzione di una particolare approssimante iniziale, la questione si inquadra nel contesto insiemistico dei classici teoremi di punto fisso.

L'analisi approfondita di quest'ultimo aspetto è tuttora in corso e sarà l'oggetto di un'altra Nota. Qui, tuttavia, viene ancora illustrata, nella conclusione, un'applicazione non priva di interesse al caso della classica funzione Γ di Eulero, che mette a confronto i vantaggi dell'algoritmo $(f, k) - \Gamma$ rispetto ai metodi tradizionalmente usati a questo proposito.

1. Detti, come al solito, $\mathbf{R}^+$ ed $\mathbf{N}$ rispettivamente l'insieme dei reali positivi e quello dei naturali, cominciamo con l'introdurre la classe $\mathbf{H}$ delle

(*) Gruppo Matematico della Facoltà d'Ingegneria. Viale delle Scienze (Parco d'Orléans), 90128 Palermo.

(**) Istituto di Matematica dell'Università di Palermo.

(***) Nella seduta del 13 marzo 1976.

funzioni non-negative, definite su $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ e soddisfacenti ai seguenti requisiti:

1) $\forall h(x) \in \mathbf{H}, \quad h(x) < 1$;

2) $\forall h(x) \in \mathbf{H}, \quad \forall \nu \in \mathbf{N}$:

$$h(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \nu, \quad \lim_{x, (\nu+1)^-} h(x) = 1.$$

Chiameremo $\mathbf{H}$ «*la classe delle mantisse generalizzate*».

Richiamiamo poi il seguente criterio di totale convergenza, dato e dimostrato in [6]:

TEOREMA 1.1. *Sia* $x_0 \geq 0$ *ed* $f(x)$ *una funzione positiva e* lg-*concava per* $x > x_0$. *Ciò premesso, condizione necessaria e sufficiente perché la serie di funzioni*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[\frac{f(n)}{f(n-1)} \right]^x \frac{f(n)}{f(n+x)} - 1 \right\} \tag{1.1}$$

converga in $\mathbf{R}^+$, *è che riesca*

$$\lim_{x, \infty} \frac{f(x)}{f(x-1)} \neq 0. \tag{1.2}$$

Inoltre, quando ciò avviene, la convergenza della serie data è totale, in ogni insieme limitato $\mathbf{K}$ *contenuto in* $\mathbf{R}^+$.

A questo punto, poichè per lo scopo che ci prefiggiamo non lede la generalità assumere nella (0.1) $k = 1$, illustreremo l'annunciata estensione dell'algoritmo $(f, k) - \Gamma$ (cfr. [6]) con riferimento a quest'assunzione; e porremo $E_1 = E$.

Allora, detta $\langle x \rangle$ la parte intera del reale x ed $\mathscr{H}$ la famiglia di tutte le successioni di mantisse generalizzate, siano:

α) $\mathscr{H}^*$ la sottofamiglia di $\mathscr{H}$ per cui riesce

1) $\forall \{h_n(x)\} \in \mathscr{H}^*, \quad E h_n(x) = h_{n+1}(x)$;

2) $\forall \{h_n(x)\} \in \mathscr{H}^*, \quad \lim_{n, \infty} h_n(x) = x - \langle x \rangle$;

β) $f(x)$ una funzione positiva su $\mathbf{R}^+$, quivi logaritmicamente concava e tale da aversi:

$$f(n+1) - f(n) = o[f(n)] \tag{1.3}$$

secondo il filtro di Fréchet su $\mathbf{N}$;

γ) $\mathscr{T}$ un'applicazione da $\mathscr{H}^*$ nella famiglia delle funzioni positive su $\mathbf{R}^+$, così definita:

$$\forall \{(h_n x)\} \in \mathscr{H}^*, \{h_n(x)\} \overset{\mathscr{T}}{\longmapsto} t_{h_1}(x) = \{f[\langle x\rangle + h_1(x)]\}^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left\{\prod_1^{\langle x\rangle+1} f(\nu)\right\}^{h_1(x)} \cdot \left\{\prod_1^{\langle x\rangle} f(\nu)\right\}^{1-h_1(x)},$$

(con la solita convenzione che un prodotto valga 1 ogniqualvolta il suo indice di partenza superi quello d'arrivo);

$$\delta) \qquad t_{n+1}(x) = \{f[\langle x\rangle + h_{n+1}(x)]\}^{-1} t_n(x+1) \quad , \quad n \in \mathbf{N} - \{0\},$$

una relazione di ricorrenza dipendente soltanto dal particolare elemento $\{h_n(x)\} \in \mathscr{H}^*$ e soggetta alla condizione: $t_1(x) = t_{h_1}(x)$.

Ad ogni complesso di dati del tipo α), β), γ) e δ) daremo il nome di « *algoritmo* $(f, 1) - \Gamma$ *generalizzato* ». (Si noterà che le funzioni introdotte in γ) corrispondono alla funzione d'innesco detta, in [6], « *la prima fattoriale interpolante* »).

2. Proveremo ora il seguente

TEOREMA 2.1. *Ogni algoritmo* $(f, 1) - \Gamma$ *generalizzato risolve su* $\mathbf{R}^+$ *l'equazione funzionale*

$$\mathrm{E}t(x) = f(x)\, t(x). \tag{2.1}$$

Inoltre, tutte le soluzioni così trovate coincidono.

Dimostrazione. Si ponga: $w = \lg t$ e $g = \lg f$. Allora, applicando un algoritmo $(f, 1) - \Gamma$ generalizzato, si ha:

$$\begin{aligned}
w_n(x) &= -\sum_0^{n-1} g[\langle x\rangle + h_n(x) + \nu] + h_n(x) \sum_1^{\langle x\rangle+n} g(\nu) + \\
&+ [1 - h_n(x)] \sum_1^{\langle x\rangle+n-1} g(\nu) = -\sum_2^{\langle x\rangle+n-1} g[\langle x\rangle + h_n(x) + \nu] + \sum_2^{\langle x\rangle+n-1} g(\nu) + \\
&+ [h_n(x) + \langle x\rangle] \sum_2^{\langle x\rangle+n-1} [g(\nu) - g(\nu - 1)] - \langle x\rangle g[\langle x\rangle + n] + \\
&- g[\langle x\rangle + h_n(x)] - g[\langle x\rangle + h_n(x) + 1] + \sum_n^{\langle x\rangle+n-1} g[\langle x\rangle + h_n(x) + \nu] + \\
&+ [h_n(x) + \langle x\rangle + 1]\, g(1) + [h_n(x) + \langle x\rangle]\{g[\langle x\rangle + n] - g[\langle x\rangle + n - 1]\} = \\
&= \sum_2^{\langle x\rangle+n-1} \left\{[h_n(x) + \langle x\rangle] \lg \frac{f(\nu)}{f(\nu - 1)} + \lg \frac{f(\nu)}{f[h_n(x) + \langle x\rangle + \nu]}\right\} + \\
&- \lg f[h_n(x) + \langle x\rangle] - \lg f[h_n(x) + \langle x\rangle + 1] + \\
&+ [h_n(x) + \langle x\rangle + 1] \lg f(1) + [h_n(x) + \langle x\rangle] \lg \frac{f[\langle x\rangle + n]}{f[\langle x\rangle + n - 1]} + \\
&+ \sum_{n+1}^{n+\langle x\rangle} \lg f[h_n(x) + \langle x\rangle + \nu - 1] - \langle x\rangle \lg f[\langle x\rangle + n].
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Si osservi ora che gli ultimi due addendi altro non sono se non la somma di $\langle x \rangle$ termini, ciascuno del tipo:

$$\lg \frac{f\,[h_n(x) + \langle x \rangle + n + \mu]}{f\,[\langle x \rangle + n]}\,, \tag{2.3}$$

con $\mu = 0\,, 1\,, \cdots, \langle x \rangle - 1$; e ciascuno di questi, per via delle ipotesi espresse al paragrafo precedente, in β), tende a zero quando n diverge. (Si tenga presente che una funzione concava o definitivamente non decresce o definitivamente non cresce).

Dunque i suddetti due ultimi addendi si annullano al divergere di n, così come, – del resto evidentemente –, fa il terz'ultimo.

Inoltre, dal Teorema 1.1, si trae pressochè immediatamente che il primo addendo dell'espressione sopra ottenuta per $w_n(x)$ converge al divergere di n; e altrettanto fanno, per ciò che si è assunto nel paragrafo precedente, in γ), gli addendi restanti.

In conclusione, vi è luogo a considerare il limite per $n \to \infty$ della suddetta espressione e a pòrre, su $\mathbf{R}^+$:

$$w(x) = \lim_{n,\infty} w_n(x). \tag{2.4}$$

D'altro canto, per l'assunzione δ) del paragrafo 1, si ha, per ogni $x \in \mathbf{R}^+$:

$$w_n(x+1) = w_{n+1}(x) + \lg f\,[h_{n+1}(x) + \langle x \rangle], \tag{2.5}$$

donde, al divergere di n, in virtù dell'implicita continuità della $f(x)$:

$$w(x+1) = w(x) + \lg f(x) \tag{2.6}$$

e quindi la prima parte dell'asserto.

Sia ora $\omega_n(x)$ l'analoga della (2.2) ottenuta in corrispondenza ad un altro algoritmo $(f, 1) - \Gamma$ generalizzato, individuato dalla successione $\{\chi_n(x)\} \in \mathscr{H}^*$. Se allora si designano con $\mathscr{E}_{n,h}^{(1)}$ ed $\mathscr{E}_{n,h}^{(2)}$ le due successioni infinitesime corrispondenti rispettivamente alla somma degli ultimi due addendi della (2.2) ed al terz'ultimo di questa, si avrà, con ovvio significato dei simboli $\mathscr{E}_{n,\chi}^{(1)}$ ed $\mathscr{E}_{n,\chi}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} w_n(x) - \omega_n(x) &= \\ = \sum_{2}^{\langle x \rangle + n - 1} &\left\{ [h_n(x) - \chi_n(x)] \lg \frac{f(\nu)}{f(\nu - 1)} - \lg \frac{f\,[h_n(x) + \langle x \rangle + \nu]}{f\,[\chi_n(x) + x + \nu]} \right\} + \\ &+ \lg \frac{f\,[\chi_n(x) + \langle x \rangle]}{f\,[h_n(x) + \langle x \rangle]} + \lg \frac{f\,[\chi_n(x) + \langle x \rangle + 1]}{f\,[h_n(x) + \langle x \rangle + 1]} + \\ &+ [h_n(x) - \chi_n(x)] \lg f(1) + [\mathscr{E}_{n,h}^{(1)} - \mathscr{E}_{n,\chi}^{(1)}] + [\mathscr{E}_{n,h}^{(2)} - \mathscr{E}_{n,\chi}^{(2)}]\,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

espressione nella quale il secondo, il terzo e il quarto addendo tendono evidentemente a zero quando n diverge. Mostreremo ora come ciò avvenga anche per il primo.

Invero, tenendo presente la prima delle ipotesi espresse in β) (paragrafo 1), si può scrivere, non appena sia $\nu \geq 2$ e dovunque riesca $h_n(x) > \chi_n(x)$:

$$(2.8)\qquad [h_n(x) - \chi_n(x)] \lg \frac{f[\langle x\rangle + \nu + 2]}{f[\langle x\rangle + \nu + 1]} \leq \lg \frac{f[h_n(x) + \langle x\rangle + \nu]}{f[\chi_n(x) + \langle x\rangle + \nu]} \leq$$

$$\leq [h_n(x) - \chi_n(x)] \lg \frac{f[\langle x\rangle + \nu]}{f[\langle x\rangle + \nu - 1]},$$

da cui:

$$(2.9)\qquad [h_n(x) - \chi_n(x)] \sum_{2}^{\langle x\rangle + n - 1} \left\{ \lg \frac{f(\nu)}{f(\nu - 1)} - \lg \frac{f[\langle x\rangle + \nu]}{f[\langle x\rangle + \nu - 1]} \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{2}^{\langle x\rangle + n - 1} \left\{ [h_n(x) - \chi_n(x)] \lg \frac{f(\nu)}{f(\nu - 1)} - \lg \frac{f[h_n(x) + \langle x\rangle + \nu]}{f[\chi_n(x) + \langle x\rangle + \nu]} \right\} \leq$$

$$\leq [h_n(x) - \chi_n(x)] \sum_{2}^{\langle x\rangle + n - 1} \left\{ \lg \frac{f(\nu)}{f(\nu - 1)} - \lg \frac{f[\langle x\rangle + \nu + 2]}{f[\langle x\rangle + \nu + 1]} \right\}.$$

D'altronde, quale che sia $r \in \mathbf{N}$ e $\nu \geq 2$, si ha identicamente:

$$(2.10)\qquad \lg \frac{f(\nu)}{f(\nu - 1)} - \lg \frac{[f\langle x\rangle + \nu + r]}{f[\langle x\rangle + \nu + r - 1]} = \sum_{\nu}^{\langle x\rangle + \nu + r - 1} \left[\lg \frac{f(\lambda)}{f(\lambda - 1)} - \lg \frac{f(\lambda + 1)}{f(\lambda)} \right],$$

(a meno che non sia $\langle x\rangle = r = 0$, nel qual caso il primo membro della (2.10) è banalmente nullo).

Allora la prima e la terza sommatoria in (2.9) dànno luogo, per $n \to \infty$, rispettivamente a $\langle x\rangle$ e a $\langle x\rangle + 2$ serie, tutte convergenti in virtù del Teorema 1.1; donde, in effetti, il tendere a zero del primo addendo a secondo membro della (2.7), dovunque riesca $h_n(x) > \chi_n(x)$.

Con ragionamento perfettamente analogo, – ma scambiando le veci di $h_n(x)$ e $\chi_n(x)$ –, si perviene alla stessa conclusione, laddove sia $h_n(x) < \chi_n(x)$. (Del tutto banale è poi considerare quelle x per cui sia $h_n(x) = \chi_n(x)$).

Dunque, raccogliendo quanto fin qui ottenuto circa la (2.7), si trae che la $\{w_n(x) - \omega_n(x)\}$ è una zero–successione; e pertanto, – tenuto conto della prima parte dell'asserto –, il teorema rimane completamente dimostrato.

3. Esporremo ora, per concludere, qualche breve considerazione relativa alla classica funzione Γ di Eulero. È ben noto [2] che a questa si perviene ricercando la soluzione lg–convessa della (0.1) per $k = 1$ ed $f = I^+$ (funzione identica su $\mathbf{R}^+$), sotto la condizione iniziale $t(1) = 1$.

Orbene, se $w_n(x)$ designa ancora l'approssimante n–ma di $\lg t(x)$ ottenuta con un algoritmo $(I^+, 1) - \Gamma$ generalizzato e $\tilde{w}_n(x)$ quella ottenuta con l'elegante procedimento di Artin [1] cui si è sopra accennato, può vedersi con qualche calcolo che riesce:

$$w_n(x) = \overset{\circ}{w}_{n+\langle x\rangle}(x) + \lg \frac{x}{h_n(x)+\langle x\rangle} + \tag{3.1}$$

$$+ \sum_{2}^{\langle x\rangle+n-1}\left\{[h_n(x)+\langle x\rangle - x]\lg\frac{\nu}{\nu-1} + \lg\frac{x+\nu-1}{h_n(x)+\langle x\rangle+\nu-1}\right\} +$$

$$+ [h_n(x)+\langle x\rangle-x]\lg\frac{\langle x\rangle+n}{\langle x\rangle+n-1} + \lg\frac{x+\langle x\rangle+n-1}{h_n(x)+2\langle x\rangle+n-1} +$$

$$+\sum_{1}^{\langle x\rangle}\lg\left[1+\frac{h_n(x)+\nu-1}{\langle x\rangle+n}\right];$$

donde, per opportuno innesco, si trae (cfr. [6]) che *l'approssimazione* n–ma *fornita da un algoritmo* (I^+, 1) — Γ *è più spinta di quella* $[n+\langle x\rangle]$–ma *costruita mediante il requisito di convessità per la* $w(x)$. (Si tenga presente che il contributo dato dall'ultimo addendo di (3.1) è in ogni caso positivo).

Infine, si osservi che risulta anche:

$$w_n(x) = -\lg[h_n(x)+\langle x\rangle] + h_n(x)\lg\langle x+1\rangle + \lg[\langle x\rangle!] + \tag{3.2}$$

$$+\sum_{2}^{n}\left\{-h_n(x)\lg\left[1-\frac{1}{\langle x+\nu\rangle}\right] - \lg\left[1+\frac{h_n(x)-1}{\langle x+\nu\rangle}\right] + \lg\left[1-\frac{1}{\langle x+\nu\rangle}\right]\right\}$$

e d'altro canto, se $z \in \mathbf{R}^+$, $n \in \mathbf{N}-\{0\}$, si ha:

$$-z\lg\left(1-\frac{1}{n}\right) - \lg\left(1+\frac{z-1}{n}\right) + \lg\left(1-\frac{1}{n}\right) = \tag{3.3}$$

$$= \frac{z(z-1)}{2n^2} + o\left[\frac{z(z-1)}{2n^2}\right];$$

sicchè, in virtù dell'ovvia diseguaglianza;

$$\left|\frac{h_n(x)[h_n(x)-1]}{2\langle x+\nu\rangle^2}\right| \leq \frac{1}{8\nu^2}, \tag{3.4}$$

si conclude che *il resto della serie che compare in* $w_n(x)$ *è, a differenza di quanto avviene per* $\overset{\circ}{w}_n(x)$, *equivalente* (cfr. [3]) *a quello di una serie totalmente convergente.*

BIBLIOGRAFIA

[1] E. ARTIN – *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Leipzig (Teubner).

[2] N. BOURBAKI (1951) – *Fonctions d'une variable réelle*, 7, 160, Paris.

[3] N. BOURBAKI (1951) – *Fonctions d'une variable réelle*, 5, 60–70, Paris.

[4] C. JORDAN (1950) – *Calculus of Finite Differences*, Chelsea Publishing Co., New York.

[5] S. VALENTI (1973) – *Sull'equazione funzionale* $t(x+kz, y, z) = f(x, y, z)\, t(x, y, z)$, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 54 (6), 872, Roma.

[6] S. VALENTI *et al.* (1975) – *Convergenza e applicabilità di un algoritmo di tipo* Γ (Comunicazione al X Congresso dell'U.M.I., Cagliari, 1975), « Le Matematiche », *30*, 1, Catania.