Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Lamberto Cesari

Teoremi di esistenza al passaggio attraverso valori critici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.3, p. 198–201.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_3_198_0>

Analisi matematica. — *Teoremi di esistenza al passaggio attraverso valori critici.* Nota di LAMBERTO CESARI, presentata (*) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — Under sole qualitative hypotheses in the large the author has proved the existence of equibounded solutions to nonlinear operational equations in a Hilbert space when a parameter describes an interval containing a point of resonance. Applications have been made to problems of periodic solutions, and to elliptic problems.

1. Noi consideriamo qui il problema astratto della forma

$$\mathrm{E}x + \alpha x = \mathrm{N}x\,, \qquad x \in \mathrm{S}\,, \tag{1}$$

dove $\mathrm{N} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ è un operatore nonlineare e continuo, α un parametro lineare, S uno spazio di Hilbert reale, ed $\mathrm{E} : \mathrm{D}(\mathrm{E}) \to \mathrm{S}$, $\mathrm{D}(\mathrm{E}) \subset \mathrm{S}$, è un operatore lineare non necessariamente limitato, per il quale l'insieme delle soluzioni $x^* \in \mathrm{S}$ del problema omogeneo $\mathrm{E}x = 0$ è un sottospazio proprio S_0 di S di dimensione m finita, ossia, $\mathrm{S}_0 = \ker \mathrm{E}$, $1 \leq m < \infty$. Nei termini del metodo di biforcazione, o alternativo, (cfr. Cesari [1], [2]), sia $\mathrm{P} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ la proiezione ortogonale di S su S_0, $\mathrm{PS} = \mathrm{S}_0 = \ker \mathrm{E}$, sia $\mathrm{S}_1 = (\mathrm{I} - \mathrm{P})\,\mathrm{S}$, e supponiamo che S_1 sia anche l'immagine di E.

Sia $\mathrm{H} : \mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_1$ l'operatore parziale inverso di E che supporremo lineare, limitato, compatto, e soddisfacente le usuali relazioni del metodo alternativo per problemi autoaggiunti (h_1) $\mathrm{H}(\mathrm{I} - \mathrm{P})\,\mathrm{E} = \mathrm{I} - \mathrm{P}$; (h_2) $\mathrm{EP} = \mathrm{PE}$; (h_3) $\mathrm{EH}(\mathrm{I} - \mathrm{P}) = \mathrm{I} - \mathrm{P}$. Indicheremo con $(\,,\,)$ e $\|\ \|$ il prodotto interno e la norma in S, e porremo $\mathrm{L} = \|\mathrm{H}(\mathrm{I} - \mathrm{P})\|$.

I. (Un teorema di esistenza «in risonanza»). *Nelle ipotesi dette sopra, supponiamo altresì che* (B) *esiste una costante* $\mathrm{J}_0 > 0$ *tale che* $\|\mathrm{N}x\| \leq \mathrm{J}_0$ *per ogni* $x \in \mathrm{S}$; (N_0) *esiste una costante* $\mathrm{R}_0 \geq 0$ *tale che* $(\mathrm{N}x\,, x^*) \leq 0$ [*oppure sempre* $(\mathrm{N}x\,, x^*) \geq 0$] *per tutti gli* $x \in \mathrm{S}$, $x^* \in \mathrm{S}_0$ *con* $\mathrm{P}x = x^*$, $\|x^*\| \leq \mathrm{R}_0$, $\|x - \mathrm{P}x\| \leq \mathrm{LJ}_0$. *Allora l'equazione* $\mathrm{E}x = \mathrm{N}x$ *ha almeno una soluzione.*

Questo teorema è stato dimostrato, nel quadro del metodo alternativo, da Cesari e Kannan [4], mediante il Teorema del punto fisso di Schauder, e da Kannan e McKenna [6], mediante l'argomento topologico di Leray e Schauder.

È stato riconosciuto che le ipotesi contenute in recenti ed importanti lavori di Landesman e Lazer [7], Williams [11], Necas [9], Lazer and Leach [8] circa l'esistenza di soluzioni «in risonanza» per problemi di valori al contorno

(*) Nella seduta del 13 marzo 1976.

per equazioni differenziali nonlineari, ordinarie e alle derivate parziali, tutte implicano le condizioni (B) ed (N_0), e questi teoremi sono stati dimostrati nel quadro del metodo alternativo. La stessa osservazione può farsi anche per un teorema dimostrato recentemente da De Figueiredo [5] mediante altro metodo. Ma le stesse ipotesi di questi teoremi specifici implicano anche la condizione più forte (N_ε) (cfr. II). A sua volta questa condizione (N_ε) ha conseguenze più forti che andiamo a presentare.

II. (Un teorema di esistenza al passaggio attraverso un valore critico). *Nelle stesse ipotesi generali dette sopra, supponiamo altresì che* (B) *esiste una costante* $J_0 > 0$ *tale che* $\|Nx\| \leq J_0$ *per ogni* $x \in S$; *e che* (N_ε) *esistono tre costanti* $R_0 \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $K > LJ_0$ *tali che* $(Nx, x^*) \leq -\varepsilon \|x^*\|$ [*oppure* $(Nx, x^*) \geq \varepsilon \|x^*\|$] *per tutti gli* $x \in S$, $x^* \in S_0$ *con* $Px = x^*$, $\|x^*\| \geq R_0$, $\|x - Px\| \leq K$. *Allora esistono due altre costanti* $\alpha_0 > 0$, $C > 0$ *tali che per ogni* $|\alpha| \leq \alpha_0$ *l'equazione* $Ex + \alpha x = Nx$ *ha almeno una soluzione* x *con* $\|x\| \leq C$.

Questo Teorema è stato dimostrato da Cesari [3], nel quadro del metodo alternativo, mediante il teorema del punto fisso di Schauder. Si noti che, nell'equazione (1), il parametro α può attraversare il valore critico, o punto di risonanza, $\alpha = 0$, senza che le soluzioni divengano infinite, grazie alla non linearità del problema. Questo Teorema II, in grande, e sotto ipotesi soltanto qualitative, sembra nuovo e di qualche rilievo applicativo. È noto che sistemi fisici non lineari possono passare attraverso stati critici senza presentare singolarità, e ciò a causa del loro inerente carattere non lineare.

Come applicazione del Teorema II, possiamo ora per esempio rienunciare i teoremi di Landesman e Lazer, di Williams, e di Lazer e Leach, in una forma più forte, infatti come teoremi di esistenza « al passaggio attraverso valori critici ».

2. Consideriamo l'equazione differenziale non lineare

$$x'' + (m^2 + \alpha) x + h(x) = p(t), \tag{2}$$

dove m è un intero, h è una funzione reale della variabile reale x, $p(t)$ è una funzione di t periodica di periodo 2π, e α è un parametro reale.

III. *Se* p *è continua e di periodo* 2π, *se* h *è continua con* $|h(x)| \leq M$ *per ogni* x *reale, se esistono costanti* $c < d$, $C < D$ *tali che* $h(x) \leq C$ *per ogni* $x \leq c$; $h(x) \geq D$ *per ogni* $x \geq d$, *e inoltre* $(A^2 + B^2)^{1/2} < 2(D - C)$ *dove*

$$A = \int_0^{2\pi} p(s) \cos ms \, ds \quad , \quad B = \int_0^{2\pi} p(s) \operatorname{sen} ms \, ds ,$$

allora esistono costanti $\alpha_0 > 0$, $M > 0$ *tali che per ogni* $|\alpha| \leq \alpha_0$, *l'equazione* (2) *ha almeno una soluzione* $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, *periodica di periodo* 2π *con* $|x(t)| \leq M$.

Per $\alpha = 0$ questo Teorema fu dimostrato da Lazer e Leach [8].

3. Sia G un dominio limitato dello spazio Euclideo R^ν di punti $t = (t_1, \cdots, t_\nu)$, e denotiamo con E l'operatore differenziale di ordine $2m$ in G definito da

$$Ex = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} D^\beta (a_{\alpha\beta}(t) D^\alpha x).$$

Allo scopo di semplificare l'esposizione ci limitiamo qui a soluzioni forti. Come hanno mostrato Landesman e Lazer [7] e Williams [11], non vi sono difficoltà nuove nel discutere soluzioni deboli. Pertanto noi supponiamo qui che i coefficienti $a_{\alpha\beta}$ siano funzioni di classe $C^{|\beta|}$ nel dominio chiuso G, e che per qualche costante positiva c si abbia

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(t)\, \xi^\alpha \xi^\beta \geq c\, |\xi|^{2m}, \qquad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha},$$

per ogni $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_\nu) \in R^\nu$ e per ogni $t = (t_1, \cdots, t_\nu) \in G$. Noi assumiamo anche che la frontiera ∂G di G sia di classe G^{2m} (Per soluzioni deboli sarebbe sufficiente assumere i coefficienti $a_{\alpha\beta}$ misurabili e limitati, e la frontiera non necessariamente regolare). Supporremo ora che il problema di Dirichlet omogeneo $Ex = 0$ in G per $x \in H_0^m$ abbia soluzioni non nulle, così che, se W denota lo spazio lineare di tutte queste soluzioni, allora W ha dimensione finita, e quindi $1 \leq \dim W < \infty$, $W = \ker E$. Di fatto, nelle condizioni indicate sopra, gli elementi w di W sono elementi di $H_0 \cap H^m$, e inoltre per ogni funzione $f(t)$, $t \in G$, $f \in L_2(G)$, con $(w, f) = 0$ per ogni $w \in W$, il problema non omogeneo $Ex = f(t)$, $t \in G$, $x \in H_0^m$, ha certamente soluzioni, e tali soluzioni sono di classe $H_0^m \cap H^{2m}$. Precisamente, una ed una sola di tali soluzioni, diciamo $x_0 = Hf$, è ortogonale a W, e tutte le altre soluzioni sono date da $x_0 + W$.

Sia $h(x)$ una funzione reale della variabile reale x, continua in $(-\infty, +\infty)$, per la quale esistano i limiti $R = h(+\infty)$ e $r = h(-\infty)$ entrambi finiti. Per ogni elemento $w \in W$, indichiamo con G^+, G^- i sottoinsiemi di G in cui si ha $w(t) \geq 0$, e $w(t) \leq 0$ rispettivamente, e poniamo

$$w^+ = \int_{G^+} |w|\, dt \quad , \quad w^- = \int_{G^-} |w|\, dt.$$

IV. *Nelle condizioni dette sopra, se è soddisfatta la relazione*

$$Rw^- - rw^+ \leq \int_G f(t)\, w(t)\, dt \leq Rw^+ - rw^-,$$

allora esistono costanti $\alpha_0 > 0$, $C > 0$ *tali che, per ogni* $|\alpha| \leq \alpha_0$, *l'equazione*

$$Ex + \alpha x + h(x) = f(t)$$

ha almeno una soluzione $x \in H_0^m \cap H^{2m}$ *con* $\|x\|_{2m} \leq C$.

Nel Teorema di Williams si assumeva $\alpha = 0$, e in quello di Landesman e Lazer si assumeva altresì $m = 1$, per soluzioni deboli. Il caso di h dipendente da t, x, e da tutte le derivate parziali della x di ordine $\leq 2m - 1$, è stato considerato da De Figueiredo per $\alpha = 0$, e anche il Teorema di questo Autore può essere dato in forma forte (cioè, per ogni $|\alpha| \leq \alpha_0$) mediante l'uso del Teorema II (cfr. [3]). Risultati analoghi riguardanti il caso in cui h può crescere con x di ordine r, $0 \leq r < 1$, sono stati dimostrati da De Figueiredo [5] per il caso $\alpha = 0$ mediante un ragionamento dovuto a Hess. Anche questi teoremi possono essere dati nella forma forte di cui sopra mediante l'uso di opportune varianti del Teorema II (cfr. [3]).

Per problemi non autoaggiunti, Shaw [10] ha dato teoremi di esistenza « in risonanza », e Cesari [3] alcuni teoremi di esistenza « al passaggio attraverso a valori critici ».

BIBLIOGRAFIA

[1] L. CESARI (1963) – *Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations*, « Contributions to Differential Equations », *1*, 149–187, Wiley.

[2] L. CESARI (1975) – *Alternative methods in nonlinear analysis*. International Conference on Differential Equations, Los Angeles. Acad. Press (Antosiewicz ed.), 95–148.

[3] L. CESARI (1976) – *Functional analysis, nonlinear differential equations, and the alternative method*. (Un corso di lezioni al « Summer Institute » alla Michigan State University, East Lansing, Michigan, Giugno 1975). *Functional Analysis and Nonlinear Differential Equations*. Academic Press (Cesari, Kannar, Schuur eds.), 1976.

[4] L. CESARI e R. KANNAN (1976) – *An abstract existence theorem at resonance*, « Proc. Amer. Math. Soc. ». In corso di stampa.

[5] DE FIGUEIREDO (1975) – *The Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations: a Hilbert space approach. Partial Differential Equations and Related Topics*. (Dold and Eckman ed.) Springer Verlag, « Lecture Notes Math. », *446*, 144–165.

[6] R. KANNAN e P. J. MCKENNA – *Problems at resonance in an abstract formulation*, « Boll. Un. Mat. Italiana ». In corso di stampa.

[7] E. M. LANDESMAN e A. C. LAZER (1970) – *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance*, « Journ. Math. Mech. », *19*, 609–623.

[8] A. C. LAZER e D. E. LEACH (1969) – *Bounded perturbations of forced harmonic oscillations at resonance*, « Annali di Matematica Pura e Appl. », *72*, 49–68.

[9] J. NECAS (1973) – *On the range of nonlinear operators with linear asymptotes which are not invertible*, « Comm. Math. Univ. Caroliniensis », *14*, 63–72.

[10] H. SHAW (1976) – *A nonlinear elliptic boundary value problem at resonance*, « Journ. Diff. Equations ». In corso di stampa

[11] S. A. WILLIAMS (1970) – *A sharp sufficient condition for solution of a nonlinear elliptic boundary value problem*, « Journ. Diff. Equations », *8*, 580–586.