Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Mazzocca

Problemi estremali per partizioni di un insieme preordinato finito

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.3, p. 195–197.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_3_195_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Teorie combinatorie. — *Problemi estremali per partizioni di un insieme preordinato finito* (*). Nota di FRANCESCO MAZZOCCA, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We determine the minimum number of blocks in a partition of a finite pre-ordered set into chains, unrelated and ordered subsets respectively.

In questa Nota vengono esposte le soluzioni di tre problemi estremali relativi a partizioni di un insieme preordinato finito (cfr. Prop. I, II, III). Le prime due generalizzano i teoremi dovuti a Dilworth (cfr. [1], [2]) mediante i quali si calcola il minimo numero di blocchi che può avere una partizione in catene o in anticatene di un insieme ordinato finito. Il terzo problema, come vedremo, è specifico per gli insiemi preordinati.

Sia dunque P un insieme finito preordinato (cioè un insieme dotato di una relazione $\leq$ riflessiva e transitiva). È ben noto che la relazione Σ d'equivalenza in P

$$x\,,y\in \mathrm{P}\,,x\,\Sigma y \Longleftrightarrow x\leq y\,,y\leq x$$

permette di definire un insieme ordinato $\tilde{\mathrm{P}} = \mathrm{P}/\Sigma$, canonicamente associato a P, qualora si ponga

$$[x]_\Sigma \quad , \quad [y]_\Sigma \in \tilde{\mathrm{P}} \quad , \quad [x]_\Sigma \leq [y]_\Sigma \Longleftrightarrow x\leq y\,,$$

ove $[x]_\Sigma$ e $[y]_\Sigma$ indicano rispettivamente le classi di Σ–equivalenza degli elementi x ed y di P. Diremo che un sottoinsieme C di P è una *catena massima* se esso è una catena (cioè due suoi elementi sono sempre confrontabili rispetto al preordine di P) e se non esiste in P nessuna catena con cardinalità maggiore di quella di C. Analogamente diremo che un sottoinsieme A di P è una *anticatena massima* se A è un'anticatena (cioè due suoi elementi distinti sono sempre inconfrontabili rispetto al preoridine di P) e se è massima rispetto alla sua cardinalità.

Se $\pi = \{\mathrm{C}_1\,,\mathrm{C}_2\,,\cdots,\mathrm{C}_k\}$ è una partizione in catene di P, due elementi distinti di una qualsiasi anticatena non possono appartenere ad uno stesso blocco C_i di π, essendo ogni C_i una catena. Ne segue che, detta n la cardinalità di un'anticatena massima, deve essere

$$k \geq n.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 marzo 1976.

Si pone allora il problema di determinare il minimo numero di blocchi che può avere una partizione in catene di P. Servendosi del teorema di Dilworth (cfr. [1], [3] p. 179), che risolve l'analogo problema nel caso degli insiemi ordinati finiti, proveremo che:

I. *Il minimo numero di blocchi di una partizione in catene di un insieme preordinato finito* P *è uguale al numero n di elementi di un'anticatena massima.*

Dimostrazione. Avendo già visto che il numero di blocchi di una partizione in catene di P è sempre maggiore o uguale ad n, l'asserto sarà provato se dimostreremo che esiste una siffatta partizione di P contenente esattamente n blocchi. Osservato che il numero di elementi di un'anticatena massima dell'insieme ordinato $\tilde{\mathrm{P}}$ associato a P è ancora uguale ad n, sia $\tilde{\pi} = \{\tilde{\mathrm{C}}_1, \tilde{\mathrm{C}}_2, \cdots, \tilde{\mathrm{C}}_n\}$ una partizione in catene disgiunte di $\tilde{\mathrm{P}}$. Tale partizione esiste senz'altro valendo il già citato teorema di Dilworth per gli insiemi ordinati finiti. Posto allora

$$\tilde{\mathrm{C}}_j = \{[c^j_{i_j}]_\Sigma\}_{i_j \in \mathrm{J}}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\mathrm{C}_j = \bigcup_{i_j \in \mathrm{J}} [c^j_{i_j}]_\Sigma, \qquad j = 1, 2, \cdots, n,$$

si ha immediatamente che $\pi = \{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \cdots, \mathrm{C}_n\}$ è una partizione di P in n catene disgiunte e l'asserto è così provato.

Analogamente a quanto fatto per le partizioni in catene di un insieme preordinato finito, P, ci si può chiedere anche quale sia il minimo numero di blocchi di una partizione in anticatene di P. Relativamente a tale problema proveremo che:

II. *Il minimo numero di blocchi di una partizione in anticatene di un insieme preordinato finito* P *è uguale al numero h di elementi di una catena massima.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, se C è una catena massima di P, gli elementi massimali di C (cioè massimali nel preordine indotto su C da quello di P) sono elementi massimali anche in P (ricordiamo che un $x \in \mathrm{P}$ si dice massimale se non esiste $y \in \mathrm{P}$ tale tale che $y \not\Sigma x$ e $y \geq x$; inoltre se x è massimale, ogni elemento di $[x]_\Sigma$ è ancora massimale). Infatti, se così non fosse, detto m un elemento massimale di C, dovrebbe esistere un elemento m' di $\mathrm{P} - \mathrm{C}$ tale che $m' \geq m$ e $m' \not\Sigma m$; quindi $\{m'\} \cup \mathrm{C}$ sarebbe una catena, contro l'ipotesi che C sia massima. Si ha poi che, se C è una catena massima e x un suo elemento, tutta la classe di Σ–equivalenza $[x]_\Sigma$ di x è contenuta in C. Infatti, se così non fosse, detto y un elemento di $[x]_\Sigma - \mathrm{C}$, si avrebbe che $\mathrm{C} \cup \{y\}$ è una catena, contro l'ipotesi che C sia massima. In questo modo si è provato che ogni catena massima contiene la classe di Σ–equivalenza di un elemento massimale.

Proveremo ora l'asserto per induzione sul numero degli elementi di P, essendo esso certamente verificato per $|\,P\,| = 1$. Detto $M = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t\}$ l'insieme delle classi distinte di Σ–equivalenza degli elementi massimali di P (M è non vuoto perché P è finito), sia P′ l'insieme ottenuto escludendo da P un suo sottoinsieme $A_h = \{x_1, x_2, \cdots, x_t\}$ con $x_i \in \alpha_i$ per $i = 1, 2, \cdots, t$. Per ipotesi d'induzione, essendo $|\,P'\,| < |\,P\,|$ e poiché in P′ ogni catena massima possiede $h - 1$ elementi, esiste una partizione $\pi' = \{A_1, A_2, \cdots, A_{h-1}\}$ di P′ in $h - 1$ anticatene. Allora (osservato che se x ed y sono elementi massimali di P, con $x \,\Sigma|\Sigma\, y$, essi sono inconfrontabili) si ha che $\pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_{h-1}, A_h\}$ è una partizione di P in h anticatene e l'asserto è così provato.

Un sottoinsieme O di P si dirà ordinato se il preordine indotto in esso da quello di P è un ordine. Possiamo allora considerare anche partizioni $\pi = \{O_1, O_2, \cdots, O_s\}$ di P in cui ogni blocco O_j sia un insieme ordinato e ci possiamo porre il problema analogo ai due precendenti già studiati. All'uopo mostreremo che:

III. *Il minimo numero di blocchi di una partizione in sottoinsiemi ordinati di un insieme preordinato finito* P *è uguale al numero t di elementi di una classe di Σ–equivalenza di massima cardinalità.*

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che, detta $\pi = \{O_1, O_2, \cdots, O_s\}$ una partizione in sottoinsiemi ordinati di P, deve essere

$$s \geq t\,;$$

altrimenti, due elementi distinti di una classe di Σ–equivalenza, che contenga t elementi, dovrebbero appartenere ad uno stesso blocco O_j e ciò non può verificarsi date le ipotesi fatte. Per provare la nostra asserzione, è quindi sufficiente dimostrare l'esistenza di una partizione di P in sottoinsiemi ordinati che contenga esattamente t blocchi. Proveremo ciò per induzione sul numero di elementi di P, essendo l'asserto certamente verificato per $|\,P\,| = 1$. Sia O_t un sottoinsieme di P ottenuto scegliendo un elemento in ogni singola classe di Σ–equivalenza (si noti che O_t è un sottoinsieme ordinato di P). Per ipotesi induttiva esisterà allora una partizione, nei sottoinsiemi ordinati $O_1, O_2, \cdots, O_{t-1}$, $P' = P - O_t$, da cui segue che $\pi' = \{O_1, O_2, \cdots, O_{t-1}, O_t\}$ è una partizione di P del tipo desiderato. L'asserto è così provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. G. DILWORTH (1950) – *A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets*, « Annals of Mathematics », *51* (1° gennaio 1950), 161–166.

[2] R. G. DILWORTH (1960) – *Structure and Decomposition Theory of Lattices*, « Math. Soc. », Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. II, 3–16.

[3] G. C. ROTA e L. J. HARPER (1971) – *Matching Theory, an Introduction*, Advances in Probability, vol. I, 179–180.