
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PIERO MANGANI

**Algebrizzazione della logica monadica dotata
dell'operatore τ di Hilbert**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 60 (1976), n.2, p. 77–83.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_2_77_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 febbraio 1976

Presiede il Presidente della Classe BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Algebrizzazione della logica monadica dotata dell'operatore τ di Hilbert*^(*). Nota di PIERO MANGANI, presentata^(**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — An algebraic version of a monadic 1st order logic with Hilbert's τ -symbol is given and compared with another one to be found in a previous paper written by the Author.

1. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio formalizzato così definito:

Alfabeto di $\mathcal{L}$ è: una sequenza $\langle P_\xi \rangle_{\xi < \alpha}$ (dove α è un ordinale > 0) di simboli predicativi unari, un simbolo x di variabile individuale ed i segni logici $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, =, \tau$.

Gli insiemi $\mathcal{T}$ ed $\mathcal{E}$ dei *termini* e delle *espressioni* di $\mathcal{L}$ sono definiti tramite induzione incrociata nel modo seguente:

$$\mathcal{T}_0 = \{x\} \quad \mathcal{E}_0 = \{x = x; P_\xi x\}_{\xi < \alpha}$$

$$\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{\tau\alpha : \alpha \in \mathcal{E}_n\}$$

$$\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_n \cup \{\alpha \vee \beta; \alpha \wedge \beta; \neg \alpha; \alpha \rightarrow \beta; \alpha \leftrightarrow \beta; t_i = t_j;$$

$$P_\xi t_i : \alpha, \beta \in \mathcal{E}_n \text{ \& } t_i, t_j \in \mathcal{T}_{n+1}\}_{\xi < \alpha},$$

da cui

$$\mathcal{T} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{T}_n, \quad \mathcal{E} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{E}_n.$$

Se $t \in \mathcal{T}$ ed $\alpha \in \mathcal{E}$, con il simbolo $S_t \alpha$ denotiamo l'espressione di $\mathcal{L}$ ottenuta da α sostituendo tutte le occorrenze libere di x con t .

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gnsaga del C.N.R., 1975.

Questo lavoro è dedicato a Giovanni Sansone nel suo 85° compleanno.

(**) Nella seduta del 14 febbraio 1976.

Introduciamo inoltre le seguenti abbreviazioni: $S_{\tau\alpha} \alpha = \exists\alpha$, $S_{\tau(\neg\alpha)} \alpha = \forall\alpha$.
L'insieme degli *enunciati* (formule chiuse) di $\mathcal{L}$ sarà denotato con $\bar{\mathcal{E}}$.
Ad $\mathcal{L}$ associamo un calcolo $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ avente i seguenti assiomi:

- i) Tutte le istanze di tautologie proposizionali.
- ii) $\alpha \rightarrow \exists\alpha$ (assioma « debole » del τ).
- iii) $\forall (\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\tau\alpha = \tau\beta)$ (assioma « forte » del τ).
- iv) $\begin{cases} x = x \\ (t_i = t_j) \rightarrow (\check{S}_{t_i} \alpha \rightarrow S_{t_j} \alpha) \end{cases}$ (assiomi dell'identità).

(α, β sono elementi di $\bar{\mathcal{E}}$, t_i e t_j di $\bar{\mathcal{C}}$ ed $\check{S}_{t_i} \alpha$ indica una sostituzione *parziale* di x con t_i in α).

$\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ avrà le seguenti regole di deduzione:

- i') Modus ponens
- ii') $\frac{\alpha}{S_t \alpha} \quad (\alpha \in \bar{\mathcal{E}}; t \in \bar{\mathcal{C}})$.

Scriveremo, al solito, $X \vdash \alpha$ per indicare che α ($\in \bar{\mathcal{E}}$) è derivabile da X ($\subseteq \bar{\mathcal{E}}$) e $\vdash \alpha$ per indicare che α è una tesi di $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Definiamo ora una semantica per $\mathcal{L}$:

una *struttura* adeguata ad $\mathcal{L}$ sarà una struttura $\mathcal{A} = \langle A, R_{\xi}, \Phi \rangle_{\xi < \alpha}$ tale che:

- 1) A è un insieme non vuoto.
- 2) per ogni $\xi < \alpha$, $R_{\xi} \subseteq A$.
- 3) $\Phi: \mathcal{P}(A) \rightarrow A$ è tale che, se $X (\subseteq A)$ è non vuoto, $\Phi(X) \in X$ (cioè Φ è una *funzione di scelta* sui sottoinsiemi non vuoti di A).

Sia $\mathcal{A}$ una struttura adeguata ad $\mathcal{L}$ e $\sigma \in A^{\{x\}}$. Definiamo $\bar{\sigma} \in A^{\bar{\mathcal{E}}}$ e la relazione $\mathcal{S}at_{\mathcal{A}}(\alpha, \sigma)$, con $\alpha \in \bar{\mathcal{E}}$, per induzione incrociata, nel modo seguente:

$$(o) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}x = \sigma x \\ \mathcal{S}at_{\mathcal{A}}(x = x, \sigma) \\ \mathcal{S}at_{\mathcal{A}}(P_{\xi} x, \sigma) \quad \text{sse} \quad \sigma x \in R_{\xi} \quad (\xi < \alpha). \end{cases}$$

$$(n+1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \alpha \in \bar{\mathcal{E}}_n, \text{ poniamo } \alpha^{\mathcal{A}} = \{ a \in A : \mathcal{S}at_{\mathcal{A}}(\alpha, \sigma'), \text{ con } \sigma' x = a \}. \\ \text{Definiamo ora:} \\ \bar{\sigma}(\tau\alpha) = \Phi(\alpha^{\mathcal{A}}). \\ \mathcal{S}at_{\mathcal{A}}(\alpha \wedge \beta, \sigma), \quad \mathcal{S}at_{\mathcal{A}}(\alpha \vee \beta, \sigma), \text{ etc. nel modo consueto.} \\ \mathcal{S}at_{\mathcal{A}}(t_i = t_j, \sigma) \quad \text{sse} \quad \bar{\sigma}t_i = \bar{\sigma}t_j. \\ \mathcal{S}at_{\mathcal{A}}(P_{\xi} t_i, \sigma) \quad \text{sse} \quad \bar{\sigma}t_i \in R_{\xi}. \end{array} \right.$$

Scriviamo, al solito, $\mathcal{A} \models \alpha$ sse, per ogni $\sigma \in A^{\{x\}}$, $\mathcal{P}at_{\mathcal{A}}(\alpha, \sigma)$ e $\models \alpha$ sse, per ogni $\mathcal{A}$ ed ogni $\sigma \in A^{\{x\}}$, $\mathcal{P}at_{\mathcal{A}}(\alpha, \sigma)$.

Abbiamo ora i seguenti teoremi:

1) (Lindenbaum). *Ogni $X \subseteq \bar{\mathcal{C}}$, X non contraddittorio, si può estendere ad un $X' \subseteq \bar{\mathcal{C}}$, X' non contraddittorio e massimale.*

2) (Completezza). *Se $X \subseteq \bar{\mathcal{C}}$ è non contraddittorio allora X ha un modello.*

Dimostrazioni. Il Teorema 1 si dimostra, come al solito, usando il lemma di Zorn.

Il Teorema 2 si dimostra costruendo un mode'lo $\mathcal{A}$ di X (modello « canonico ») nel modo seguente:

Sia X' una estensione, non contraddittoria e massimale, di X ed indichiamo con $\bar{\mathcal{C}}$ l'insieme dei termini chiusi di $\mathcal{L}$ ($\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C} - \{x\}$).

Si definisca su $\bar{\mathcal{C}}$ la seguente relazione di equivalenza: $t_i \rho t_j$ sse $X' \vdash (t_i = t_j)$, e si ponga $A = \bar{\mathcal{C}}/\rho$; per ogni $\xi < \alpha$ definiamo $R_\xi \subseteq A$ nel modo seguente: $[t] \in R_\xi$ sse $X' \vdash P_\xi t$ (ovviamente questa è una buona definizione poiché, per gli assiomi dell'identità del calcolo $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, se $t \rho t^*$ si ha: $X' \vdash P_\xi t$ sse $X' \vdash P_\xi t^*$).

Per definire $\Phi: \mathcal{P}(A) \rightarrow A$ operiamo nel modo seguente: se $Y \subseteq A$ è tale che esiste una formula α di $\mathcal{L}$ per la quale accade che: $[t] \in Y$ sse $X' \vdash S_t \alpha$, poniamo $\Phi(Y) = [\tau\alpha]$; altrimenti $\Phi(Y)$ sia un arbitrario elemento di A .

La definizione data è « buona »: osserviamo, in primo luogo, che Φ è definita anche per l'insieme vuoto poiché ad esso è « associata » la formula: $\neg(x = x)$. Inoltre, se α, α^* sono due formule soddisfacenti la condizione richiesta per Y , si ha $X' \vdash \forall(\alpha \leftrightarrow \alpha^*)$ e quindi, per l'assioma forte del τ , $X' \vdash (\tau\alpha = \tau\alpha^*)$; si ha, infatti, $[t] \in Y$ sse $X' \vdash S_t \alpha$ e $[t] \in Y$ sse $X' \vdash S_t \alpha^*$ e dunque per ogni $t \in \bar{\mathcal{C}}$, $X' \vdash S_t \alpha$ sse $X' \vdash S_t \alpha^*$. Essendo X' massimale si ha, per ogni $t \in \bar{\mathcal{C}}$, $X' \vdash (S_t \alpha \leftrightarrow S_t \alpha^*)$, cioè $X' \vdash S_t(\alpha \leftrightarrow \alpha^*)$.

Posto $t_0 = \tau(\neg(\alpha \leftrightarrow \alpha^*))$, si ha $X' \vdash S_{t_0}(\alpha \leftrightarrow \alpha^*)$, cioè $X' \vdash \forall(\alpha \leftrightarrow \alpha^*)$.

Siamo ora in grado di provare che la struttura $\mathcal{A} = (\bar{\mathcal{C}}/\rho, R_\xi, \Phi)_{\xi < \alpha}$ sopra definita risulta un modello di X' (e quindi di X), addirittura che si ha, per ogni enunciato α di $\mathcal{L}$, $\mathcal{A} \models \alpha$ sse $X' \vdash \alpha$. La prova è di routine e sarà omessa.

Si ha allora il seguente

COROLLARIO (« adeguatezza » di $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ per la semantica). *Se $X \subseteq \bar{\mathcal{C}}$ ed $\alpha \in \bar{\mathcal{C}}$, allora $X \vdash \alpha$ sse $X \models \alpha$ ⁽¹⁾.*

2. Consideriamo ora una teoria X , non contraddittoria e massimale, in $\mathcal{L}$ e sia $\mathcal{A}$ il modello canonico di X ($\mathcal{A} = \langle A, R_\xi, \Phi \rangle_{\xi < \alpha}$, definito nel § 1)).

(1) Per il § 1 si veda anche [4].

Sia $\mathcal{Q}$ l'algebra di Boole semplice e λ l'isomorfismo canonico fra $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{Q}^A$.

Indichiamo con $\mathcal{B}$ la sottoalgebra di $\mathcal{Q}^A$ avente per insieme base $B = \{\lambda(\alpha^{\mathcal{A}}) : \alpha \in \mathcal{C}\}$ e con ε l'applicazione da B ad A definita così: $\varepsilon(\lambda(\alpha^{\mathcal{A}})) = [\tau\alpha]$.

Si ha facilmente, per ogni $a \in A$ ed ogni $p \in \mathcal{B}$, $p(a) = 1$ sse $\mathcal{A} \models S_{\tau\beta} \alpha$, dove $p = \lambda(\alpha^{\mathcal{A}})$ ed $a = [\tau\beta]$. (Infatti: $\mathcal{A} \models S_{\tau\beta} \alpha$ sse $[\tau\beta] \in \alpha^{\mathcal{A}}$).

Abbiamo ora il seguente:

TEOREMA 1. *La quaterna $\langle \mathcal{Q}, A, \mathcal{B}, \varepsilon \rangle$ è una τ -algebra funzionale (semplice) nel senso di [5].*

Dimostrazione. Basta verificare le condizioni i), ii), iii) di [5] (p. 68).

Ad i): sia $a \in A$ e $p \in B$, con $p = \lambda(\alpha^{\mathcal{A}})$ ed $a = [\tau\beta]$. Se $p(\varepsilon(p)) = 1$ la disuguaglianza $p(a) \leq p(\varepsilon(p))$ è banalmente vera; sia allora $p(\varepsilon(p)) = 0$. Essendo $\varepsilon(p) = [\tau\alpha]$, $\mathcal{A} \models \neg S_{\tau\alpha} \alpha$ e quindi $X \vdash \neg S_{\tau\alpha} \alpha$ e, per l'assioma debole del τ , $X \vdash \neg \alpha$. Usando la regola di deduzione ii') del calcolo $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ si ha che $X \vdash S_{\tau\beta}(\neg \alpha)$, cioè $X \vdash \neg S_{\tau\beta} \alpha$ e dunque $\mathcal{A} \models \neg S_{\tau\beta} \alpha$ ed infine $p(a) = 0$. Quindi, per ogni $a \in A$ ed ogni $p \in \mathcal{B}$ si ha: $p(a) \leq p(\varepsilon(p))$.

Ad ii): se $p, q \in \mathcal{B}$, la funzione costante $\varphi_{p,q}$ che ad ogni $a \in A$ associa il valore $q(\varepsilon(p))$ appartiene a $\mathcal{B}$ poiché $\varphi_{p,q} = \lambda((S_{\tau\beta} \alpha)^{\mathcal{A}})$, con $q = \lambda(\alpha^{\mathcal{A}})$ ed $\varepsilon(p) = [\tau\beta]$.

Ad iii): per ogni $p, q, r \in \mathcal{B}$ si deve avere che:

$$(p \dot{+} q)(\varepsilon(p \dot{+} q)) \geq r(\varepsilon(p)) \dot{+} r(\varepsilon(q)).$$

Basterà ovviamente provare che, se $(p \dot{+} q)(\varepsilon(p \dot{+} q)) = 0$, anche $r(\varepsilon(p)) \dot{+} r(\varepsilon(q)) = 0$, per ogni $r \in \mathcal{B}$.

Siano $p = \lambda(\alpha^{\mathcal{A}})$ e $q = \lambda(\beta^{\mathcal{A}})$; poiché λ è un isomorfismo si ha $p \dot{+} q = \lambda(\alpha^{\mathcal{A}} \oplus \beta^{\mathcal{A}}) = \lambda((\neg(\alpha \leftrightarrow \beta))^{\mathcal{A}})$; dall'ipotesi che $(p \dot{+} q)(\varepsilon(p \dot{+} q)) = 0$, segue $\mathcal{A} \models \neg S_{\tau(\neg(\alpha \leftrightarrow \beta))}(\neg(\alpha \leftrightarrow \beta))$, cioè $\mathcal{A} \models S_{\tau(\neg(\alpha \leftrightarrow \beta))}(\alpha \leftrightarrow \beta)$ e quindi $\mathcal{A} \models \forall(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

Si ha infine: $X \vdash \forall(\alpha \leftrightarrow \beta)$, cioè $X \vdash (\tau\alpha = \tau\beta)$ e dunque $[\tau\alpha] = [\tau\beta]$; da questo segue che $\varepsilon(p) = \varepsilon(q)$, $r(\varepsilon(p)) = r(\varepsilon(q))$, $r(\varepsilon(p)) \dot{+} r(\varepsilon(q)) = 0$, per ogni $r \in \mathcal{B}$. Il teorema è così provato.

Il Teorema 1 si può «invertire». Abbiamo infatti il seguente:

TEOREMA 2. *Se $\langle W, \bar{A}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\varepsilon} \rangle$ è una τ -algebra funzionale semplice, esiste una teoria, massimale non contraddittoria, X in un calcolo $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}^*$ tale che l'algebra $\langle \mathcal{Q}, A, \mathcal{B}, \varepsilon \rangle$ «associata» al modello canonico $\mathcal{A}$ di X è isomorfa a $\langle W, \bar{A}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\varepsilon} \rangle$. (Daremo soltanto uno schema della dimostrazione).*

Sia $\{p_\xi\}_{\xi < \alpha}$ un buon ordinamento (privo di ripetizioni) di $\bar{B} - \{0, 1\}$ e sia $\{P_\xi\}_{\xi < \alpha}$ un insieme bene ordinato e privo di ripetizioni. $\mathcal{L}^*$ avrà come simboli predicativi unari la sequenza $\{P_\xi\}_{\xi < \alpha}$. Definiamo ora due applicazioni $\lambda: \bar{\mathcal{C}}^* \rightarrow \bar{A}$ e $\mu: \mathcal{C}^* \rightarrow \bar{B}$ (con $\bar{\mathcal{C}}^*$ insieme dei termini chiusi di $\mathcal{L}^*$ ed $\mathcal{C}^*$ insieme delle espressioni di $\mathcal{L}^*$) nel modo seguente:

$$\mu(x = x) = 1 (\in \bar{B}) \text{ e } \mu(P_\xi x) = p_\xi;$$

$$\text{se } \mu \text{ è definita per } \alpha \in \mathcal{C}^*, \lambda(\tau\alpha) = \bar{\varepsilon}(\mu(\alpha));$$

se λ è definitiva per $t_i, t_j \in \bar{\mathcal{C}}^*$, $\mu(t_i = t_j)$ è la funzione costante di valore 1 se $\lambda(t_i) = \lambda(t_j)$, la funzione costante di valore zero altrimenti.

$\mu(P_\xi t_i)$ è la funzione costante di valore 1 se $p_\xi(\lambda(t_i)) = 1$, è la funzione costante di valore zero altrimenti;

$$\text{se } \mu \text{ è definita per } \alpha, \beta \in \mathcal{C}^*, \mu(\alpha \vee \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta), \text{ etc. ...}$$

Sia ora X la teoria in $\mathcal{L}^*$ i cui teoremi sono tutte e sole le formule chiuse α di $\mathcal{L}^*$ tali che $\mu(\alpha) = 1$. X è una teoria, non contraddittoria e massimale, in $\mathcal{L}^*$ il cui modello canonico $\mathcal{A}$ ha l'algebra associata $\langle \mathcal{Q}, A, \mathcal{B}, \varepsilon \rangle$ isomorfa a $\langle W, \bar{A}, \bar{B}, \bar{\varepsilon} \rangle$.

Possiamo concludere dicendo che il concetto di τ -algebra funzionale semplice dato in [5] è « adeguato » per algebrizzare le teorie (non contraddittorie) massimali di una τ -logica monadica.

3. Sia ora X una qualsiasi teoria (non contraddittoria) in $\mathcal{L}$. Definiamo sull'insieme $\mathcal{C}$ delle espressioni di $\mathcal{L}$ la seguente relazione binaria: $\alpha \sim_X \beta$ se $X \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$. Si verifica facilmente che la relazione $\sim_X$ è di congruenza per l'algebra $\mathcal{F} = \langle \mathcal{C}, \vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow \rangle$ delle formule di $\mathcal{L}$ e che $\mathcal{F}/\sim_X$ risulta un'algebra di Boole.

Si ha anche che, per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, l'applicazione $\varphi_\alpha: \mathcal{F}/\sim_X \rightarrow \mathcal{F}/\sim_X$ ben definita da: $\varphi_\alpha[\beta] = [S_{\tau\alpha} \beta]$ risulta un endomorfismo di $\mathcal{F}/\sim_X$.

Osserviamo che, se $X \vdash (\alpha \leftrightarrow \bar{\alpha})$, allora $\varphi_\alpha = \varphi_{\bar{\alpha}}$: infatti da $X \vdash (\alpha \leftrightarrow \bar{\alpha})$ segue $X \vdash \forall (\alpha \leftrightarrow \bar{\alpha})$ e dunque $X \vdash (\tau\alpha = \tau\bar{\alpha})$, da cui (per ogni $\beta \in \mathcal{C}$) $\varphi_\alpha[\beta] = \varphi_{\bar{\alpha}}[\beta]$.

Definiamo ora un'applicazione $\varepsilon: \mathcal{F}/\sim_X \rightarrow \text{End}(\mathcal{F}/\sim_X)$ nel seguente modo:

$$\varepsilon([\alpha]) = \varphi_\alpha, \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathcal{C}.$$

Si ha ora il seguente:

TEOREMA 3. *La terna $\langle \mathcal{F}/\sim_X, \text{End}(\mathcal{F}/\sim_X), \varepsilon \rangle$ risulta una τ -algebra (monadica) nel senso di [5] (algebra che chiameremo τ -algebra di Lindenbaum-Tarski della teoria X).*

Dimostrazione. Basterà verificare le condizioni i'), ii'), iii') di [5], p. 69.

Ad i'): dobbiamo provare che, per ogni $\alpha \in \mathcal{E}$, $\varphi_\alpha([\alpha]) \geq [\alpha]$ cioè che $[S_{\tau\alpha} \alpha] \geq [\alpha]$. Ma $X \vdash (\alpha \rightarrow S_{\tau\alpha} \alpha)$, per l'assioma debole del τ , e questo prova l'asserto.

Ad ii'): dobbiamo provare che, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{E}$, $\varphi_\beta(\varphi_\alpha([\gamma])) = \varphi_\alpha([\gamma])$, cioè che $[S_{\tau\beta}(S_{\tau\alpha} \gamma)] = [S_{\tau\alpha} \gamma]$, ma questo è ovvio per la definizione di « sostituzione » in $\mathcal{L}$.

Ad iii'): dobbiamo provare che, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{E}$, si ha

$$[S_{\tau(\neg(\alpha \leftrightarrow \beta))}(\neg(\alpha \leftrightarrow \beta))] \geq [S_{\tau\alpha} \gamma] \dot{+} [S_{\tau\beta} \gamma]$$

cioè che

$$[S_{\tau(\neg(\alpha \leftrightarrow \beta))}(\alpha \leftrightarrow \beta)]' \geq [S_{\tau\alpha} \gamma] \dot{+} [S_{\tau\beta} \gamma].$$

ed infine che

$$[\forall(\alpha \leftrightarrow \beta)] \leq [S_{\tau\alpha} \gamma \leftrightarrow S_{\tau\beta} \gamma]$$

Ma:

$$X \vdash (\forall(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\tau\alpha = \tau\beta))$$

e

$$X \vdash (\tau\alpha = \tau\beta) \rightarrow (S_{\tau\alpha} \gamma \leftrightarrow S_{\tau\beta} \gamma)$$

e quindi

$$X \vdash (\forall(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (S_{\tau\alpha} \gamma \leftrightarrow S_{\tau\beta} \gamma))$$

da cui segue l'asserto. Il teorema è così provato.

Abbiamo ora un inverso del Teorema 3.

TEOREMA 4. Se $\langle A, \theta, \bar{\varepsilon} \rangle$ è una τ -algebra monadica con $|A| > 1$ allora esiste una teoria X (non contraddittoria) in un calcolo $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ tale che la τ -algebra di Lindenbaum-Tarski di X è isomorfa a $\langle A, \theta, \bar{\varepsilon} \rangle$.

La dimostrazione di questo teorema si ottiene combinando il Corollario 6 ed il Teorema 8 di [5] con il Teorema 2 del presente lavoro.

Concludiamo con le seguenti osservazioni:

a) il concetto di τ -algebra monadica (dato in [5]) è « adeguato » per l'algebrizzazione delle teorie di una τ -logica monadica.

b) è, ovviamente, un lavoro di routine (anche se tecnicamente complesso) estendere le definizioni ed i teoremi del presente lavoro al caso di una τ -logica (elementare) con predicati a più posti ed ottenere così il concetto adeguato di τ -algebra cilindrica (poliadica). Risulterebbe allora evidente che il

concetto di τ -algebra cilindrica dato in [5] *non* risulta adeguato per l'algebrizzazione delle τ -logiche elementari con predicati a più posti, come era già, in parte, osservato in [5] (cfr. nota 13, p. 82).

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI (1957) - *Éléments de Mathématiques (Théorie des ensembles)*, Livre I, Paris.
- [2] P. R. HALMOS (1962) - *Algebraic logic*, N.Y.
- [3] D. HILBERT e P. BERNAYS (1934-38) - *Grundlagen der Mathematik*, I e II, Berlin.
- [4] A. C. LEISENRING (1969) - *Mathematical logic and Hilbert's ε -symbol*, London.
- [5] P. MANGANI (1966) - *Su certe algebre connesse con sistemi di logica elementare dotati dell'operatore τ di Hilbert*, « Le Matematiche », 21 (1).