Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gabriele Korchmaros

Estensioni del concetto di «poligono affin regolare» ad un qualunque piano affine

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.2, p. 119–125.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_2_119_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Geometrie finite. — *Estensioni del concetto di «poligono affin regolare» ad un qualunque piano affine.* Nota di GABRIELE KORCHMÁROS, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In a series of previous papers ([4], [5], [6], [7]) the Author introduced a studied an intuitive affine extension of the classical notion of a regular n-gon, which, relative to the case of an affine plane over any commutative field, gives a geometric interpretation of the affine regular n-gons introduced with an algebrical procedure by F. Bachmann and E. Schmidt (cfr. [2], p. 162–163). Here we give on outline of these results.

I poligoni regolari e le loro immagini affini, ossia i cosiddetti poligoni affin–regolari intervengono in talune questioni della geometria intuitiva. Va dato speciale rilievo ad essi anche nei problemi di ricoprimento e riempimento del piano euclideo, argomento sviluppato nell'ultimo ventennio da L. Fejes Toth dai suoi discepoli e arricchito da vari altri Autori.

L'introduzione e lo studio dei poligoni affin–regolari e delle loro estensioni a un piano affine sopra un qualsiasi corpo commutativo, mediante considerazioni astratte di carattere algebrico, devesi essenzialmente a F. Bachmann e a un suo collaboratore, E. Schmidt [2]. Di recente, l'Autore è riuscito a mostrare come siffatte estensioni possano venir ottenute anche per via puramente sintetica, gettando così i fondamenti di carattere geometrico per quest'argomento.

La presente Nota offre di tali risultati un riassunto abbastanza particolareggiato, rinviando però per le dimostrazioni ai lavori [4], [5], [6], [7]. I procedimenti dimostrativi là usati hanno per lo più carattere analitico, ma involgono pure argomentazioni della teoria elementare dei corpi commutativi.

1. In un piano affine definiamo secondo l'uso (ved. B. Segre [9], p. 173) *n–arco* un insieme di n punti a tre a tre non allineati.

Una permutazione ciclica dei punti di un n–arco chiameremo – analogamente al caso euclideo – col nome di *n–agono* (non–degenere); questo può essere rappresentato con $P_0 P_1 \cdots P_{n-1}$, dove $P_i = \varphi^i(P)$ per un arbitrario suo vertice P prefissato e φ indica la suddetta permutazione.

Due n–agoni $P_0 P_1 \cdots P_{n-1}$ ed $R_0 R_1 \cdots R_{n-1}$ si diranno *affin–equivalenti*, se esiste un'affinità del piano che trasformi P_i in R_i ($i = 0, 1, \cdots, n-1$).

È noto che gli affin-equivalenti dei poligoni regolari e regolari stellati del piano euclideo – i cosiddetti poligoni affin-regolari – possono venir caratterizzati col porre una condizione relativa ai parallelismi di lati e corde, dunque prescindendo da ogni condizione di natura metrica ([4], 2, Tétel):

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1976.

Un n-agono $P_0 P_1 \cdots P_{n-1}$ $(n \geq 3)$ *del piano euclideo risulta affin-equivalente con un n-agono regolare o regolare stellato se, e solo se, preso un qualsiasi n-agono* $R_0 R_1 \cdots R_{n-1}$ *regolare o regolare stellato, esiste una corrispondenza biunivoca che trasforma* R_i *in* P_i $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ *e conserva i parallelismi di lati e corde; ossia* $P_0 P_1 \cdots P_{n-1}$ *risulta affin-regolare se, e solo se, per ogni* i $(0 \leq i \leq n-1)$ *valgono le*

$$(*) \qquad \begin{cases} P_i \, P_{i+1} \parallel P_{i-j} \, P_{i+1+j} & j = 1, 2, \cdots, [(n-2)/2], \\ P_{i-1} \, P_{i+1} \parallel P_{i-1-j} \, P_{i+1+j} & j = 1, 2, \cdots, [(n-3)/2], \end{cases}$$

dove gli indici si intendono considerati modulo n.

Va rilevato che quest'ultima interpretazione del citato teorema assegna al poligono affin-regolare un'altra definizione equivalente a quella suaccennata, definizione costruita sui soli tre assiomi punto–retta. Pertanto, preso un quasivoglia piano affine e considerato in esso il suddetto attributo quale definizione del poligono affin–regolare – e cioè se gli n-agoni $P_0 P_1 \cdots P_{n-1}$ del piano soddisfacenti alle (*) vengono chiamati col nome di « n–agoni affin-regolari » – si ottiene una nuova nozione analoga a quella di poligono affin-regolare del piano euclideo.

L'analogia naturale suggerisce tutto un complesso di problemi, anzi apre un indirizzo di ricerca per il quale fornisce mezzi idonei.

Nella presente Nota ci si limita a un piano pascaliano e lo studio viene approfondito seguendo una via costruttiva che porge fra l'altro tutti gli esemplari dei poligoni affin–regolari testé introdotti. Però non sembra facile trovare gli analoghi sviluppi in un piano non–pascaliano, compreso il caso – spiccatamente interessante – in cui questo risulti finito. Alcuni esempi sui piani di traslazione sono noti – specialmente ad opere di F. Kárteszi e dei suoi discepoli [3] –; ma l'Autore non è ancora pervenuto ad un esauriente e sistematico studio di tali poligoni.

2. Supponiamo dunque assegnato un piano costruito su di un corpo commutativo, traducente l'ipotesi che esso risulti pascaliano. Presa una conica C del piano, si può sempre assumere un riferimento affine in modo che l'equazione di C si riduca a forma canonica, cioè risulti, a seconda che essa abbia 2, 1, 0 punti all'infinito:

$$xy = 1 \quad \text{(iperbole)}, \qquad y = x^2 \quad \text{(parabola)}, \qquad x^2 + y^2 + sxy = 1 \quad \text{(ellisse)},$$

ove nell'ultimo caso s non deve potere venir scritto sotto la forma $s = k + k^{-1}$ con $k \in K$.

Fissato un tal riferimento affine, è conveniente descrivere C in forma parametrica. Analogamente al caso classico, i parametri delle coniche d'equazione $xy = 1$ o $y = x^2$ vengono presi sul corpo base, in maniera che al parametro v corrisponda rispettivamente il punto (v, v^{-1}) o (v, v^2); mentre al punto (x, y) della equazione $x^2 + y^2 + uxy = 1$ corrisponda, quale parametro, l'elemento $x + \vartheta y$ del corpo commutativo, K′, ottenibile da K mediante un'estensione di grado 2 con l'aggiunzione simbolica di un'indeterminata ϑ, soggetta all'equazione algebrica $\vartheta^2 - s\vartheta + 1 = 0$ irriducibile in K.

Va notato che, nell'ultima parte dell'enunciato, il campo del parametro munito della moltiplicazione di K′ risulta un sottogruppo del gruppo moltiplicativo dello stesso K'. Infatti, indicato con $\bar{z}$ il coniugato $x + (1/\vartheta)\, y$ del parametro $z = x + \vartheta y$, l'insieme dei parametri consta di tutti gli elementi di K' che soddisfano alla $z\bar{z} = 1$, ossia esso è il nucleo dell'omomorfismo $z \rightarrow z\bar{z}$.

Con tali convenzioni, valgono allora le seguenti Proposizioni ([5], 1. Tétel):

TEOREMA 1/*a*. *Sia* G *un gruppo finito contenuto nel gruppo moltiplicativo di un corpo commutativo* K. *Se l'ordine di* G *è* n, *un piano affine costruito sopra* K *ammette degli* n*–agoni affin–regolari inscritti nell'iperbole d'equazione* $xy = 1$. *Preso un generatore* v *di* G (1) *e detto* P_i *il punto di parametro* $v^i\ (i = 0, 1, \cdots, n-1)$, $P_0 P_1 \cdots P_{n-1}$ *risulta un tal* n*–agono affin–regolare.*

TEOREMA 1/*b*. *Se la caratteristica di un corpo* K *commutativo è un numero primo* $q \geq 3$, *un piano affine costruito sopra* K *ammette dei* q*–agoni affin–regolari inscritti nella parabola d'equazione* $y = x^2$. *Preso un elemento* $v\ (\neq 0)$ *di* K *e detto* P_i *il punto di parametro* $iv\ (i = 0, 1, \cdots, q-1)$, $P_0 P_1 \cdots P_{q-1}$ *risulta un tale* q*–agono affin–regolare.*

TEOREMA 1/*c*. *Sia* K' *un'estensione di grado* 2 *di un corpo* K *commutativo con l'aggiunzione simbolica di un'indeterminata* ϑ *soggetta all'equazione* $\vartheta^2 - s\vartheta + 1 = 0$ *irriducibile in* K *e sia* H *un sottogruppo finito del gruppo costituito dalle soluzioni d'equazione* $z\bar{z} = 1$, *contenuto nel gruppo commutativo di* K'. *Se l'ordine di* H *è* n, *un piano affine costruito sopra* K *ammette degli* n*–agoni affin–regolari inscritti nell'ellisse d'equazione* $x^2 + y^2 + sxy = 1$. *Preso qui un generatore* z *di* H (1) *e detto* P_i *il punto di parametro* $z^i\ (i = 0, 1, \cdots, n-1)$, $P_0 P_1 \cdots P_{n-1}$ *risulta un tal* n*–agono affin–regolare.*

TEOREMA 2 ([5], 2, Tétel). *In un piano affine costruito su di un corpo.* K *commutativo gli* n*–agoni affin–regolari sono quelli enumerati nel Teorema 1 e i loro affin–equivalenti.*

Se nel Teorema 1 e poi in 2 facciamo in particolare $K = GF(p^r)\ (p > 2)$, otteniamo senz'altro il seguente

COROLLARIO ([4], 2. Tétel [6], Teorema 3 [8]). *Condizione necessaria e sufficiente affinché su di un piano di Galois d'ordine* $p^r\ (p > 2)$ *esistano degli* n*–agoni affin–regolari non–degeneri, è che* n *risulti divisore di uno degli interi* $p^r - 1,\ p,\ p^r + 1$.

3. Consideriamo di nuovo un piano affine costruito su di un corpo K commutativo. È ben conosciuta dalla geometria elementare la corrispondenza fra i punti del piano e i vettori di uno spazio lineare a 2-dimensione sopra il campo base, avente la seguente proprietà: Presi tre punti P, R, S e i corrispondenti vettori $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, la condizione di allineamento dei P, R, S, equivale al sussistere della $\boldsymbol{s} \in \{\boldsymbol{p} + K(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p})\}$,

Se ora si passa dal piano al corrispondente spazio lineare, che verrà denotato con V, lo studio delle proprietà affini dei poligoni viene ad imperniarsi su tale spazio V, sicché può venir trattato per via algebrica. Abbiamo ricordato che F. Bachmann ed E. Schmidt hanno

(1) Ogni sottogruppo d'ordine finito del gruppo moltiplicativo di un corpo commutativo è ciclico (cfr. [1], Satz 26.]

già elaborato quest'argomento. Fra i loro numerosi risultati segnaliamo ora soltanto quelli inerenti alle estensioni del concetto di poligono affin-regolare.

Cominciamo col riassumere alcune convenzioni e definizioni, rimandando per i particolari a [2] e in parte a [9]. Chiamiamo *n-agoni* – con F. Bachmann ed E. Schimidt – le n-ple $(\boldsymbol{p}_0, \cdots, \boldsymbol{p}_{(n-1)})$ ordinate di vettori di V. È chiaro che le n-ple $(\boldsymbol{p}_0, \cdots, \boldsymbol{p}_{(n-1)})$, rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per gli elementi di K, costituisce uno spazio, la somma diretta $V \oplus \cdots \oplus V$, si converrà di chiamare col nome di «*spazio degli n-agoni*».

D'ora in avanti, indicheremo con $n \geq 3$ un numero intero che non sia multiplo della caratteristica di K. È ben noto che il polinomio $x^n - 1$ può allora essere fattorizzato in una estensione finita e separabile L di K.

$$x^n - 1 = \prod (x - w) , \tag{2}$$

dove w descrive l'insieme delle *radici n-esime dell'unità* di $L : w^n = 1$. Se d è esattamente l'ordine di w ($w^d = 1$ e $w^s \neq 1$ per $s = 1, \cdots, d - 1$), allora w si chiama una *radice d-esima primitiva dell'unità*. Ogni radice d-esima dell'unità apparirà fra le radici n-esime dell'unità se d e un divisore di n $(d \mid n)$.

Definiamo il polinomio ciclotomico d-esimo, come al solito, mediante la

$$\varphi_d (x) = \prod_w (x - w) , \tag{3}$$

dove w percorre soltanto le radice d-esime primitive dell'unità. È noto che le $\varphi_d (x)$ sono polinomi a coefficienti interi e, di conseguenza, risultano contenute nell'anello K $[x]$ dei polinomi sopra K.

Raggruppando i fattori della (2), si ottiene

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \varphi_d (x). \tag{3}$$

Per le radici primitive d-esime dell'unità, w, il polinomio $x^2 - (w^k + w^s) x + w^{k+s}$, cioè il prodotto $(x - w^k)(x - w^s)$, risulta simmetrico se, e solo se, $k + s = d$; sicché, in L $[x]$, ogni $\varphi_d (x)$ si spezza nel prodotto dei suoi divisori simmetrici di grado 2: fissata una radice w primitiva n-esima dell'unità, e posto, per abbreviare, $c_k = w^k + w^{n-k}$ $(k = 1, 2, \cdots, [(n-1)/2])$, ciò può esprimersi nel modo seguente

$$\varphi_d (x) = \prod (x^2 - c_k x + 1) , \tag{4}$$

ove k percorra l'insieme dei multipli di n/d che sono primi con d e non superano n. Ne discende, in particolare, il sussistere in L (x) della

$$\varphi_n (x) = \prod_{\substack{k<n/2 \\ (k,n)=1}} (x^2 - c_k x + 1) ; \tag{5}$$

in forza della (3), si perviene parimente a una decomposizione per $x^n - 1$, valida generalmente solo in L $[x]$ (e non in K $[x]$), espressa dalla

$$x^n - 1 = \begin{cases} (x - 1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (x^2 - c_k x + 1), & \text{se } n \text{ è dispari.} \\ (x - 1)(x + 1) \prod_{k=1}^{(n/2)-1} (x^2 - c_k x + 1), & \text{se } n \text{ è pari,} \end{cases} \tag{6}$$

e tutti i divisori simmetrici di grado 2 contenuti in L $[x]$ di $x^n - 1$ compaiono necessariamente nella [6].

Assegnato un numero n (≥ 3), non multiplo della caratteristica di K e introdotto il polinomio ciclotomico n-esimo sopra K, $\varphi_n (x)$, supponiamo che la fattorizzazione di $\varphi_n(x)$ fornita dalla (5), e 'n generale valida solo nell'anello dei polinomi di un'estensione propria finita e separabile di K, valga già in K $[x]$. A ogni divisore $x^2 - c_k x + 1$ di $\varphi_n(x)$ resta allora collegato un sistema circolare d'equazioni in V, della forma

$$\boldsymbol{r}_0 - c_k \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{r}_{n-1} - c_k \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{0}, \tag{7}$$

dal che, interpretando le sue soluzioni quali n–agoni $(\boldsymbol{r}_0, \cdots, \boldsymbol{r}_{n-1})$, si può desumere un'estensione di carattere puramente algebrico del concetto di n–agono regolare euclideo. Infatti, F. Bachmann ed E. Schmidt in [2] (ved. p. 170–171, a cui ritorneremo verso la fine del presente numero) hanno dimostrato che questo classico concetto può venir esteso al piano affine ottenuto da V nel modo solito, cioè col concepire i vettori di V quali suoi punti e gli insiemi $\{\boldsymbol{p} + \mathrm{K}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}) \mid \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{r} \in \mathrm{V}\}$ quali sue rette, chiamandosi *n–agoni affin–regolari* le n–ple $(\boldsymbol{r}_0, \cdots, \boldsymbol{r}_{n-1})$ provenienti dalle soluzioni $\boldsymbol{r}_0, \cdots, \boldsymbol{r}_{n-1}$ della (7).

In proposito si giunge al problema di vedere quand'è che un sistema del tipo

$$\boldsymbol{r}_0 - c\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{r}_{n-1} - c\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{0}, \qquad c \in \mathrm{K} \tag{8}$$

risulta compatibile in V. Gli stessi Autori hanno dato la seguente condizione necessaria e sufficiente affinché ciò accada:

Il sistema (8) ammette soluzioni non triviali in V se, e solo se, $c \in \{2, -2\}$ oppure $(x^2 - cx + 1) \mid (x^n - 1)$ $(c \in \mathrm{K})$.

Riguardo alla prima possibilità, si dimostra abbastanza facilmente che per $c = 2$ le soluzioni della (8) constano solo delle n-ple dotate di vettori tutti uguali e, qualora n sia dispari, lo stesso può dirsi nel caso $c = -2$. Se invece n è pari e $c = -2$, come soluzioni appaiono soltanto le n–ple in cui siano uguali tanto i vettori con indice pari quanto quelli con indice dispari, in modo che i due rispettivi rappresentanti risultano fra loro opposti.

Supponiamo in secondo luogo che un polinomio simmetrico di grado 2 a coefficienti in K, $x^2 - cx + 1$, divida $x^n - 1$ e riferiamoci al sistema (8) associato al suo coefficiente c. In virtù delle (6) e (8), $x^2 - cx + 1$ risulta divisore di $\varphi_d(x)$ con un intero d $(d \mid n)$. Qualora sia $d < n$, per ogni soluzione $\boldsymbol{r}_0, \cdots, \boldsymbol{r}_{n-1}$ valgono le

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_d \quad , \quad \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{d+1} \quad , \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_{d+2}, \cdots,$$

ed inoltre $\boldsymbol{r}_0, \cdots, \boldsymbol{r}_{n-1}$ soddisfa al sistema circolare di equazioni

$$\boldsymbol{r}_0 - c\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{r}_{d-1} - c\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{0};$$

ossia, con la terminologia introdotta, $(\boldsymbol{r}_0, \cdots, \boldsymbol{r}_{d-1})$ risulta un d–agono affin-regolare. Per questi motivi un tale n–agono $(\boldsymbol{r}_0, \cdots, \boldsymbol{r}_{n-1})$ conviene chiamarlo col nome di *n–agono affin–regolare n/d–volte ricoperto*.

Dal punto di vista algebrico è importante che, se per c $(\in \mathrm{K})$ le (8) risultano compatibili in V, allora gli n-agoni provenienti dalle soluzioni dello stesso sistema (8) costituiscono, nello spazio degli n–agoni, un sottospazio $\mathscr{C}(c)$ a dimensione uno o due (più precisamente, soltanto le $\mathscr{C}(2)$ e $\mathscr{C}(-2)$ sono 1–dimensionali) e due qualunque delle $\mathscr{C}(c)$ hanno intersezione triviale. Da quanto sopra discende inoltre come siffatte c restino esaurite da 2, da -2 e dalle c_k figuranti nella (8).

Riguardo alle $\mathscr{C}(c)$, F. Bachmann ed E. Schmidt in [2] (p. 166) hanno dimostrato che, qualora la (5) sia valida già in K $[x]$, tutte le c_k giacciono in K e la somma diretta

$$\begin{cases} \mathscr{C}(2) \oplus \mathscr{C}(-2) \oplus \mathscr{C}(c_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{C}(c_{(n-2)/2}) & \text{con } n \text{ pari,} \\ \mathscr{C}(2) \oplus \mathscr{C}(c_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{C}(c_{(n-1)/2}) & \text{con } n \text{ dispari} \end{cases} \tag{9}$$

copre lo spazio degli n-agoni. Osserviamo che la Nota [7] dà una nuova dimostrazione di tale risultato.

Merita un esame a parte il caso classico, in cui cioè K sia il campo reale e il piano sia euclideo. Allora ogni

$$(10) \qquad c_k = 2 \cos k \frac{2\pi}{n} = e^{(ik(2\pi/n))} + e^{(-ik(2\pi/n))} \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1) ; i^2 = 1)),$$

quale somma di due radici n–esime dell'unità fra loro inverse, fornisce un divisore $x^2 - c_k x + 1$ di $x^n - 1$ (più precisamente di $\varphi_d(x)$ dove, per abbreviare, si è posto $d = (n/(k, n))$ e viceversa, riferito a numeri c reali, $(x^2 - cx + 1)|(x^n - 1)$ implica che c sia uguale a una delle c_k. Basandosi su quanto precede, possiamo vedere come attualmente si discutono le (8).

Se $k = 1$, si riconosce subito che, preso un n–agono regolare $R_0 \cdots R_{n-1}$ con baricentro O e posto $\boldsymbol{r}_j = OR_j$ $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$, il sistema (8) è manifestamente soddisfatto da $\boldsymbol{r}_0, \cdots, \boldsymbol{r}_{n-1}$. Ne discende l'osservazione che dagli stessi vettori OR_i provengono soluzioni anche per tutti gli altri valori di k che figurano nella (10). Difatti, ponendo

$$\boldsymbol{r}_0^k = OR_0 \quad , \quad \boldsymbol{r}_1^k = OR_k, \cdots, \boldsymbol{r}_{(n-1)}^k = OR_{(n-1)k},$$

dove gli indici vanno notoriamente considerati mod n, $\boldsymbol{r}_0^k, \cdots, \boldsymbol{r}_{(n-1)}^k$ soddisfa del pari alle (8), con $c = c_k$.

Qualora $(k, n) = 1$ gli estremi $R_0, R_k, R_{2k}, \cdots, R_{(n-1)k}$ risultano ovviamente fra loro distinti ed $R_0 R_k \cdots R_{(n-1)k}$ rappresenta un n-agono regolare stellato del piano euclideo, per $(n/(k, n)) = d < n$, si avrà invece $R_0 = R_{dk}$, $R_k = R_{(d+1)}, \cdots_k$, sicché $R_0 R_k \cdots R_{(n-1)k}$ si ridurrà attualmente a un d–agono regolare o regolare–stellato con vertici (k, n)–volte ricoperti.

Osserviamo poi che, preso un qualsiasi n–agono affin–regolare e procedendo come prima' ma ponendo quest'ultimo in luogo di $R_0 \cdots R_{n-1}$, si ottengono ancora delle soluzioni del sistema (8).

Finiamo la discussione col rimandare a un risultato noto (cfr. [2], p. 170–171, oppure [4], n. 1), che stabilisce in particolare come ogni soluzione della (8) abbia a provenire da qualche n–agono affin–regolare (non–degenere o degenere) procedendo sul modo poc'anzi descritto.

Rammentiamo infine che, se nella (9) assumiamo in particolare il campo reale in luogo di K, otteniamo senz'altro il seguente

COROLLARIO. *Se i vettori si applicano nello stesso punto* O *del piano euclideo, ogni n–agono (non–degenere o degenere) si decompone in una somma di n–agoni affin–regolari di n–agoni affin–regolari (k, n)–volte ricoperti e, nel caso n pari, di qualche n–agono n/2–volte ricoperto. Se i componenti hanno lo stesso baricentro* O, *allora una siffatta decomposizione è univocamente determinata a meno dell'ordine.*

4. I numeri precedenti suggeriscono naturalmente la questione di indagare se, su di un piano affine sopra un corpo commutativo, gli n–agoni affin–regolari – nel senso di F. Bachmann ed E. Schmidt – e quelli introdotti nel n. 1 della presente Nota comprendono la medesima classe di n–agoni.

Abbiamo già accennato che, sul piano euclideo, le due classi, a prescindere dai casi degeneri, coincidono. Lo stesso si può dire su di un piano sopra un corpo commutativo avente caratteristica O oppure 2. Infatti, nella Nota [5] si dimostra che

Gli affin–equivalenti degli n–agoni affin–regolari descritti nei Teoremi 1/a e 1/c, ossia quelli che rispettivamente sono iscrittibili in un'iperbole e in un'ellisse, risultano anche affin–regolari secondo F. Bachmann e E. Schmidt; e viceversa, ogni n–agono affin–regolare secondo F. Bachmann e E. Schmidt *risulta immagine affine (non–degenere o degenere) di un n–agono affin–regolare dato (quale esempio) nel Teorema* 1/*a oppure in* 1/*c*.

Da ciò segue senz'altro che

Se la caratteristica q del corpo base del piano è un numero primo dispari i q–agoni affin–regolari dati nel Teorema 1/*b non hanno necessariamente a provenire da qualche q–agono nel senso di F. Bachmann e E. Schmidt.*

Non è però da credersi che tali q–agoni non possano venir ottenuti mediante un sistema circolare di equazioni. Infatti, si stabilisce (cfr. [5]) il seguente risultato:

Sia $P_0 P_1 \cdots P_{q-1}$ un q–agono in un piano affine sopra un corpo commutativo K avente caratteristica q dispari. Assunto un riferimento affine coll'origine O, indichiamo con $\boldsymbol{p}_i$ il vettore OP_i ($i = 0, 1, \cdots, q-1$). Condizione necessaria e sufficiente affinché $\boldsymbol{p}_0, \cdots, \boldsymbol{p}_{q-1}$ soddisfi al sistema circolare d'equazione

$$\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_0 = 3(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1), \cdots, \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_{q-1} = 3(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0),$$

è che $P_0 P_1 \cdots P_{q-1}$ risulti immagine affine (degenere o no) di un q–agono affine regolare fornita dal Teorema 1/*b*.

Per concludere, segnaliamo una scarsa analogia fra i casi $q \nmid n$ e $q = n$. Classifichiamo gli n–agoni affin–regolari e quelli n/d–volte ricoperti in modo che due di essi stiano nella stessa classe se risultano affin–equivalenti; allora per $q \nmid n$ il numero totale delle classi che $[n/2]$ – in concordanza colla (9) –, mentre per $q = n$ di tali classi ce n'è una sola.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. ARTIN (1954) – *Galoissche Theorie*, Leipzig.

[2] F. BACHMANN e E. SCHMIDT (1970) – *n–Ecke*, Hochschultaschenbücher Verlag, Mannheim, Wien, Zürich.

[3] F. KÁRTESZI (1974–75) – *Alcuni classi di poligoni affin–regolari in un piano di Galois d'ordine dispari*, Seminari tenuti presso l'Univ. degli Studi a Budapest.

[4] G. KORCHMÁROS (1972) – *Véges affin sikok ováliasiból kiválasztható reguláris pontalakzatok*, Tesi di laurea.

[5] G. KORCHMÁROS (1974) – *Az affin szabályos sokszögek F. Bachmann–E. Schmidt féle elméletének geometriai megalapozása*, KAMM-füzetek.

[6] G. KORCHMÁROS (1974) – *Poligoni affin–regolari nei piani di Galois d'ordine dispari*, «Rend. dell'Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 56 (5), 690–697.

[7] G. KORCHMÁROS (1975) – *Darstellung der Einheitsmatrix über einen kommutativen Körper als Matrixsummen. Eine Anwendung in der Theorie der n-Ecke*, «Periodica Polytechnica (Budapest)», 4, 89–97.

[8] NGUYEN MONG HY (1973) – *Páratlan rendü affin Galois sikok ellipszise mint affin szabályos sokszög*, «Matematikai Lapok», 23, 303–313.

[9] B. SEGRE (1961) – *Lectures on modern geometry*, Cremonese (Roma).