Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sergio Bressan

Sulla stabilità dell'equilibrio di un sistema dissipativo soggetto a forze di tipo attrattivo dipendenti dal tempo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.6, p. 771–774.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_6_771_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Meccanica razionale. — *Sulla stabilità dell'equilibrio di un sistema dissipativo soggetto a forze di tipo attrattivo dipendenti dal tempo* (*). Nota di SERGIO BRESSAN, presentata (**) dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — We consider a holonomic and dissipative system having n degrees of freedom, subjected to elastic and time dependent forces. Some authors have determined sufficient conditions in order that the equilibrium configuration may be really stable. By means of a different procedure we give sufficient conditions for stability in a much more general case of time dependent forces.

I. INTRODUZIONE

Si consideri un sistema olonomo a n gradi di libertà riferito alle n coordinate lagrangiane $q_1, \cdots, q_n$. I vincoli siano indipendenti dal tempo e si suppongano presenti delle forze dissipative la cui azione si possa compendiare nella forma quadratica F di Rayleigh:

$$\mathrm{F} = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, c_{rs}\, \dot{q}_r\, \dot{q}_s \tag{1}$$

definita positiva e a coefficienti costanti, con $c_{rs} = c_{sr}$.

Supponiamo inoltre che la forza viva sia rappresentata dalla forma quadratica definita positiva e a coefficienti costanti:

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, b_{rs}\, \dot{q}_r\, \dot{q}_s \tag{2}$$

ove $b_{rs} = b_{sr}$.

Nell'ulteriore ipotesi che agiscano delle forze di tipo elastico variabili col tempo e derivanti dal potenziale generalizzato:

$$\mathrm{U} = -\tfrac{1}{2} w^2(t) \sum_{1}^{n}{}_{r}\, q_r^2 \tag{3}$$

in cui $w(t)$ è una funzione positiva, continua, limitata e con derivata prima continua, vari Autori [1] hanno trovato delle condizioni sufficienti affinché le coordinate lagrangiane $q_n(t)$ del detto sistema e le loro derivate prime $\dot{q}_n(t)$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R..

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1975.

(1) Vedi: R. NARDINI, *Su un sistema dissipativo ad n gradi di libertà*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 7 (5) (1949); S. LEVONI, *Su un sistema dissipativo con forza elastica dipendente dal tempo*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (1964).

si mantengano limitate durante il moto e quindi la posizione di equilibrio $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$ sia di equilibrio stabile.

Nel presente lavoro mi sono proposto di vedere se qualche cosa di analogo si può dire nel caso di una sollecitazione più generale derivante dal potenziale:

$$U = -\tfrac{1}{2} w^2(t)\, V(q) \tag{4}$$

ove $V(q)$ è una funzione derivabile quanto occorre che ammette un minimo effettivo nella configurazione $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$.

Dimostro che la risposta è affermativa. Più precisamente faccio vedere che la configurazione $q_r = 0$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ risulta di equilibrio stabile se il coefficiente di elasticità $w^2(t)$, anche se non decrescente, si mantiene limitato.

II. Una relazione energetica. Osservazioni su una particolare funzione delle q e $\dot{q}$.

Partendo dalle equazioni di Lagrange per il moto di un sistema in presenza di azioni dissipative, ricavo ora una relazione energetica che ci sarà utile in seguito.

Nel caso in esame le equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial U}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n). \tag{5}$$

Moltiplico le (5) membro a membro per $\dot{q}_r$ e sommo rispetto ad r da 1 ad n. Tenendo conto del fatto che risulta

$$\frac{dU}{dt} = -w\dot{w}\, V(q) + \sum_1^n {}_r \frac{\partial U}{\partial q_r}\, \dot{q}_r \tag{6}$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = -\frac{2}{w^2} - \frac{\partial U}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{7}$$

si ha:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{dU}{dt} + 2F + 2\frac{\dot{w}}{w} U = 0. \tag{8}$$

Pongo:

$$\Gamma^2 = f(w)\,(T - U) \tag{9}$$

ove $f(w)$ è una funzione positiva che soddisfa ad ampie condizioni di regolarità.

Derivando la (9) rispetto al tempo e tenendo conto di (8) si ottiene:

$$\frac{d\Gamma^2}{dt} = -2fF + \dot{w}f'\,T - \left(\frac{2f}{w} + f'\right)\dot{w}U. \tag{10}$$

Se vale la:

$$\dot{w}(t) > 0 \tag{11}$$

basta porre [(2)]:

$$f(w) = \frac{1}{w^2} \tag{12}$$

affinchè la funzione non negativa Γ^2 risulti non crescente per $t \to +\infty$.

Se invece vale la:

$$\dot{w}(t) \leq 0 \tag{13}$$

supponendo (il che non è restrittivo) che ovunque interessa sia: $U < 0$, la posizione:

$$f(w) = 1 \tag{14}$$

assicura la non crescenza di Γ^2.

III. SUFFICIENZA DELLE CONDIZIONI (11) O (13)

Dimostro ora che, se è valida la (11) oppure la (13), l'origine è una posizione di equilibrio stabile.

In sostanza faccio vedere che, fissato comunque un intorno di configurazioni I dell'origine e un $\varepsilon > 0$ è sempre possibile determinare un altro intorno di O, I_0, e un $\delta > 0$ tali che, abbandonando il sistema in un punto qualunque $P_0 \in I_0$ con forza viva iniziale $T_0 < \delta$, esso, nel moto che ne consegue, occupa solo configurazioni $P \in I$ con forza viva $T < \varepsilon$.

Fissati comunque I ed ε e ricordando che $V(q)$ ha un minimo effettivo nell'origine ove non è restrittivo supporre che risulti $V(O) = 0$) considero un intorno di O $J \subset I$ che sia limitato e tale che:

$$\forall P \begin{cases} \in J \\ \neq 0 \end{cases} \qquad V(P) > 0$$

Sia $\bar{J}$ la frontiera di J. Vale:

$$\forall P \in \bar{J} \qquad V(P) > 0. \tag{15}$$

Dato che $w(t)$ è positiva e limitata si può scrivere:

$$0 < l \leq w^2(t) \leq L < +\infty \tag{16}$$

con l e L costanti. Pongo:

$$V_m = \min_{P \in \bar{J}} V(P). \tag{17}$$

Risulta certamente $V_m > 0$.

(2) Vedi anche: R. CACCIOPPOLI, *Una questione di stabilità*, « Rend. Acc. Lincei », *11* (6), 1930.

Determino ora δ e I_0. Pongo:

$$(18)\qquad \begin{cases} \delta = \dfrac{1}{3}\min\left(\dfrac{V_m l}{(L+1)L}, \dfrac{\varepsilon}{L+1}\right) \\ I_0 \subset J : \forall P \in I_0 \qquad V(P) < \delta . \end{cases}$$

Osservo che, detti P_0 e T_0 la configurazione e la forza viva all'istante iniziale, risulta:

$$(19)\qquad f(w)\,[T + \tfrac{1}{2} w^2 V(P)] \le f(w_0)\,[T_0 + \tfrac{1}{2} w_0^2 V(P_0)].$$

Considero i due casi:

A) è $$f(w) = 1/w^2.$$

Abbandonando il sistema in una qualunque configurazione $P_0 \in I_0$ con forza viva $T_0 < l\delta$ si genera un moto per il quale valgono le seguenti disuguaglianze [3]:

$$\frac{T}{L} + \frac{1}{2} V(P) \le \Gamma^2(t) \le \Gamma^2(0) \le \frac{T_0}{l} + \frac{1}{2} V(P_0)$$

da cui si ricava:

$$(20)\qquad \begin{aligned} T &\le L\left[\frac{T}{L} + \frac{1}{2}V(P)\right] \le \frac{L}{l} T_0 + \frac{L}{2} V(P_0) \le \frac{3}{2} L\delta \\ V(P) &\le 2\left[\frac{T}{L} + \frac{1}{2}V(P)\right] \le 2\left[\frac{T_0}{1} + \frac{1}{2}V(P_0)\right] \le 3\,\delta . \end{aligned}$$

Ricordando (17) e (18) si può concludere che il sistema non può uscire dall'intorno J e la sua forza viva non può superare ε.

B) è $$f(w) = 1.$$

Abbandonando ancora il sistema in una qualunque posizione $P_0 \in I_0$ con forza viva $T_0 < l\delta$ si genera un moto per il quale in base a (19) si può scrivere [3]:

$$(21)\qquad T + \tfrac{1}{2} w^2 V(P) \le T_0 + \tfrac{1}{2} LV(P_0).$$

Dalla (21) si ha:

$$(22)\qquad \begin{cases} T \le T + \dfrac{1}{2} w^2 V(P) \le T_0 + \dfrac{1}{2} LV(P_0) \le \dfrac{3}{2} L\delta \\ V(P) \le 2\left[\dfrac{T}{w^2} + \dfrac{1}{2}V(P)\right] \le 2\left[\dfrac{T_0}{l} + \dfrac{1}{2}\dfrac{L}{l} V(P_0)\right] \le 2\,\delta + \dfrac{L}{l}\delta \le 3\dfrac{L}{l}\delta . \end{cases}$$

Anche in questo caso il sistema non esce dall'intorno J e la sua forza viva non supera mai ε, c.d.d.

Riassumendo si ha che, anche nell'ipotesi di una sollecitazione derivante da un potenziale più generale come è quello del tipo (4), l'origine risulta di equilibrio stabile se il coefficiente di elasticità $w^2(t)$, anche se non decrescente, si mantiene limitato [e, naturalmente, $V(q)$ è minima nell'origine].

(3) Almeno finché è $P \in J$ ossia $V(P) > 0$.