Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Silvana Abeasis

Calcolo della coomologia di alcuni spazi simmetrici con metodi puramente algebrici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.6, p. 758–768.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_6_758_0>

Topologia. — *Calcolo della coomologia di alcuni spazi simmetrici con metodi puramente algebrici.* Nota di SILVANA ABEASIS, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Purely algebraic calculation of the De Rham cohomology for classifying spaces of SO and SO (k), following ideas of E. Cartan.

In questo articolo ci si propone di calcolare per via puramente algebrica la coomologia di De Rham degli spazi classificanti dei gruppi SO ed SO (k). Tali anelli sono naturalmente ben noti e sono generati il primo dalle classi di Pontryagin il secondo da alcune classi di Pontryagin nel caso k dispari o da alcune classi di Pontrayagin e dalla classe di Eulero nel caso k pari [2].

La possibilità teorica di calcolare tali coomologie tramite la teoria degli invarianti è nota [1], e costituisce storicamente il primo approccio a questo problema, essa è stata usata per esempio per il calcolo dei numeri di Betti per le Grasmaniane [3]. Però il calcolo diretto della coomologia di BSO e di BSO (k) non è mai stata portata a termine con questo metodo.

Dato l'interesse delle classi caratteristiche anche come punto di convergenza di varie teorie matematiche, appare utile completare tale punto di vista, che è del tutto indipendente dagli altri approcci noti.

1. PRELIMINARI

Ricordiamo il teorema fondamentale sulla coomologia di De Rham per uno spazio simmetrico [1].

Sia G un gruppo di Lie compatto e sia $\theta : G \to G$ un automorfismo tale che $\theta^2 = 1$. Detto $\tilde{H}$ il sottogruppo di G degli elementi lasciati fissi da θ ed H un sottogruppo di $\tilde{H}$ contenente la componente connessa dell'identità, si ha:

DEFINIZIONE 1.1. Lo spazio quoziente G/H si chiama spazio simmetrico.

Dato uno spazio simmetrico $\Sigma = G/H$, siano $\mathcal{G}$ ed $\mathcal{H}$ le algebre di Lie rispettivamente dei gruppi G ed H. G opera su $\mathcal{G}$ con $ad(g)$, $g \in G$. In particolare H opera su $\mathcal{G}$ e manda $\mathcal{H}$ in sè. Segue che H opera su $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ e quindi su $(\mathcal{G}/\mathcal{H})^*$ e sull'algebra esterna $\Lambda(\mathcal{G}/\mathcal{H})^*$.

Indicato con $(\Lambda(\mathcal{G}/\mathcal{H})^*)^H$ il sottogruppo delle forme alterne H-invarianti e con $H^*(\Sigma)$ la coomologia di De Rham di Σ, si ha il seguente:

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1975.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche Geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

TEOREMA 1.2. $H^*(\Sigma) \simeq (\Lambda(\mathcal{G}/\mathcal{H})^*)^H$ *come algebre.*

Sia $\tilde{G}_{k,n}$ la grasmanniana dei k–piani orientati dello spazio R^n, $(0 < k < n)$. $\tilde{G}_{k,n}$ è uno spazio simmetrico nel seguente modo. Si consideri il gruppo SO (n) che opera sui k–piani orientati. Lo stabilizzatore di un punto è il sottogruppo SO $(n-k) \times$ SO (k) e $\tilde{G}_{k,n}$ è in modo naturale lo spazio omogeneo SO (n)/SO $(n-k) \times$ SO (k). Esso è uno spazio simmetrico. Infatti, considerata la matrice

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} I_{n-k} & O \\ O & -I_k \end{pmatrix}$$

ove con I_h si intende la matrice unità di rango h, la coniugazione per $\boldsymbol{a}$ induce un automorfismo θ di periodo 2 su SO (n). Detto $\tilde{H}$ il sottogruppo di SO (n) formato dagli elementi fissati da θ, si verifica immediatamente che $\tilde{H}$ è formato dalle matrici a blocchi del tipo $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ ove $A \in O(n-k)$, $B \in O(k)$ e inoltre Det A = Det B $= \pm 1$. Ne segue che SO $(n-k) \times$ SO (k) è un sottogruppo di indice 2 in $\tilde{H}$.

È immediato che l'algebra di Lie $\mathcal{G}$ del gruppo SO (n) è costituita dalle metrici A $n \times n$ antisimmetriche, cioè tali che $A^t = -A$, e pertanto l'algebra di Lie $\mathcal{H}$ di SO $(n-k) \times$ SO (k) è costituita dalle matrici $n \times n$ a blocchi del tipo $\begin{pmatrix} C & O \\ O & D \end{pmatrix}$, ove $C^t = -C$, $D^t = -D$.

D'altra parte, detto K lo spazio delle matrici a blocchi del tipo $\begin{pmatrix} O & B \\ -B^t & O \end{pmatrix}$ ove B è una matrice $(n-k) \times k$, si vede immediatamente che:

1) $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus K$,

2) K è invariante rispetto a $ad(g)$, $g \in$ SO $(n-k) \times$ SO (k),

3) $K \simeq \mathrm{Hom}(R^k, R^{n-k})$ come spazi su cui agisce il gruppo SO $(n-k) \times$SO (k),

4) $\mathrm{Hom}(R^k, R^{n-k}) \simeq R^{n-k} \otimes R^k$ come moduli su SO $(n-k) \times$ SO (k).

Infatti, per 1), 2), 3) basta osservare che:

$$\begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & B \\ -B^t & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{-1} & O \\ O & Y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & XBY^{-1} \\ -(XBY^{-1})^t & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & XBY^t \\ -(XBY^t)^t & O \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda 4), si osservi che $\mathrm{Hom}(R^k, R^{n-k})$ è isomorfo in modo canonico a $(R^k)^* \otimes R^{n-k}$; d'altra parte, poiché operiamo col gruppo SO (k), il prodotto scalare canonico su R^k lo identifica a $(R^k)^*$ come SO (k)–moduli.

Dal Teorema 1.2 segue che $H^*(\tilde{G}_{k,n}) \simeq (\Lambda(R^k \otimes R^{n-k}))^{SO(k) \times SO(n-k)}$.

Il problema è ora ridotto al calcolo delle forme alterne sullo spazio $R^k \otimes R^{n-k}$ invarianti rispetto all'azione del gruppo SO $(k) \times$ SO $(n-k)$ che agisce nella maniera canonica, cioè $(g_1, g_2)(u \otimes v) = g_1 u \otimes g_2 v$.

Tale calcolo si farà nel modo seguente: si calcolano innanzi tutto le forme multilineari su $R^k \otimes R^{n-k}$ invarianti, poi se ne deducono quelle alterne con l'operazione di alternazione. A tale scopo ricordiamo il seguente:

LEMMA 1.3. *Dati due spazi vettoriali* U, Z, *di dimensione finita su* R, *su cui operino rispettivamente i gruppi* G *ed* H, *si ha*:

$$\mathrm{Hom}(U \otimes Z, R)^{G \times H} \simeq \mathrm{Hom}(U, R)^G \otimes \mathrm{Hom}(Z, R)^H.$$

Dimostrazione. $\mathrm{Hom}(U \otimes Z, R)^{G \times H} \simeq ((U \otimes Z)^*)^{G \times H} \simeq (U^* \otimes Z^*)^{G \times H}$; $(U^* \otimes Z^*)^{G \times 1} \simeq$ $\simeq (U^*)^G \otimes Z^*$; $(U^* \otimes Z^*)^{G \times H} \simeq ((U^* \otimes Z^*)^{G \times 1})^{1 \times H} \simeq (U^*)^G \otimes Z^*)^{1 \times H} \simeq (U^*)^G \otimes (Z^*)^H$.

Le forme multilineari di grado p su $R^k \otimes R^{n-k}$ sono forme lineari su $(R^k)^{\otimes p} \otimes (R^{n-k})^{\otimes p}$. Dal lemma segue che quelle invarianti sotto l'azione di SO $(k) \times$SO $(n-k)$ sono combinazioni lineari di forme che si decompongono nel prodotto tensoriale di una forma multilineare di grado p su R^k ed SO (k)–invariante, e di una forma multilineare di grado p su R^{n-k} ed SO $(n-k)$–invariante.

Per procedere, conviene ricordare il teorema fondamentale sugli invarianti di SO (k) ([4], p. 53). Sia $V = R^k$. Gli invarianti per SO (k) di un numero r di vettori $v_1, v_2, \cdots, v_r \in V$ si ottengono tutti dai seguenti invarianti fondamentali:

1) (v_i, v_j) prodotto scalare dei vettori v_i e v_j,

2) $[v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_k}]$ determinante dei vettori $v_{i_1}, \cdots, v_{i_k}$.

Da questo teorema segue facilmente che le forme multilineari SO (k)-invarianti su $V^{\otimes p}$ sono generate linearmente dalle forme del tipo:

1') $(v_{i_1}, v_{i_2})(v_{i_3}, v_{i_4}) \cdots (v_{i_{p-1}}, v_{i_p})$ (p pari),

2') $[v_{j_1} \cdots v_{j_k}](v_{i_1}, v_{i_2}) \cdots (v_{i_{p-k-1}}, v_{i_{p-k}})$ (($p - k$) pari).

Ci restringiamo per ora allo studio degli invarianti che si esprimono tramite i soli prodotti scalari. In questo caso, le forme saranno necessariamente in grado pari, $p = 2h$.

Poniamo per semplicità $V = R^k$, $W = R^{n-k}$. Dalle osservazioni precedenti segue che le forme multilineari invarianti su $V \otimes W$ che si esprimono mediante prodotti scalari sono generate linearmente dalle foime del tipo:

$$(v_{i_1}, v_{i_2}) \cdots (v_{i_{2h-1}}, v_{i_{2h}})(w_{j_1}, w_{j_2}) \cdots (w_{j_{2h-1}}, w_{j_{2h}}) = \psi .$$

Pertanto, alternando queste forme otterremo dei generatori lineari per le forme alterne invarianti.

Se ψ' si ottiene da ψ permutando gli indici $i_1, \cdots, i_{2h}$ e $j_1, \cdots, j_{2h}$ con la stessa permutazione $\sigma \in S_{2h}$, allora $A(\psi') = \pm A(\psi)$, ove con A si è indicato l'operatore di alternazione sullo spazio $(V \otimes W)^{\otimes p}$. Ci limiteremo pertanto allo studio dell'alternazione delle forme

$$\varphi_\sigma = (v_1, v_2) \cdots (v_{2h-1}, v_{2h})(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}) \cdots (w_{\sigma(2h-1)}, w_{\sigma(2h)}), \ \sigma \in S_{2h} .$$

2. Il poligono associato alla forma φ_σ

Osserviamo innanzi tutto che $A(\varphi_\sigma) = 0$ se σ è la permutazione identica. Infatti:

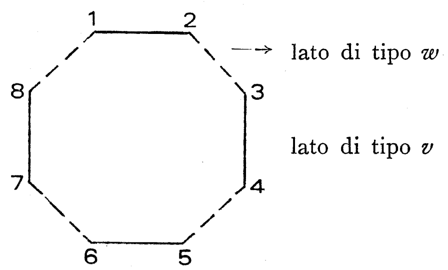
$$A(\varphi_\sigma) = \frac{1}{(2h)!} \sum_{\alpha \in S_{2h}} \varepsilon_\alpha (v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}) \cdots (v_{\alpha(2h-1)}, v_{\alpha(2h)})(w_{\alpha(1)}, w_{\alpha(2)}) \cdots (w_{\alpha(2h-1)}, w_{\alpha(2h)})$$

e per ogni addendo, relativo quindi ad un $\alpha \in S_{2h}$ fissato, ve ne è uno di segno opposto, relativo alla permutazione α' ottenuta dalla α componendola con la trasposizione $(\alpha(1), \alpha(2))$. In particolare non vi sono forme alterne non nulle e invarianti in grado 2.

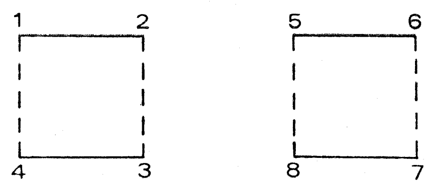
Sia ora $\sigma \in S_{2h}$ una permutazione diversa dalla permutazione identica. Alla φ_σ si può associare un complesso unidimensionale nella maniera seguente: si consideri un vertice in corrispondenza ad ogni v_i e w_j, un lato per ogni coppia (v_i, v_{i+1}) ed un lato per ogni coppia $(w_{\sigma(j)}, w_{\sigma(j+1)})$. Per distinguere i lati dei due tipi li diremo rispettivamente « lato di tipo v » oppure « lato di tipo w ». Identifichiamo poi il vertice v_{i+1} del lato (v_i, v_{i+1}) con il vertice $w_{\sigma(j)}$, $\sigma(j) = i + 1$, del lato $(w_{\sigma(j)}, w_{\sigma(j+1)})$. In questo modo si ottiene un *poligono* chiuso, che denoteremo con P_σ. Per costruzione, i vertici di P_σ sono in numero di $2h$; in ogni vertice concorrono un lato di tipo v ed uno di tipo w; P_σ non è necessariamente connesso ed in generale sarà unione disgiunta di più poligoni, ciascuno con un numero pari di lati.

Esempi:

$$\varphi_\sigma = (v_1, v_2)(v_3, v_4)(v_5, v_6)(v_7, v_8)(w_2, w_3)(w_4, w_5)(w_6, w_7)(w_8, w_1)$$



$$\varphi_\sigma = (v_1, v_2)(v_3, v_4)(v_5, v_6)(v_7, v_8)(w_2, w_3)(w_4, w_1)(w_6, w_7)(w_8, w_5)$$



Siano ora σ', $\sigma'' \in S_{2h}$ e $P_{\sigma'}$, $P_{\sigma''}$ i poligoni associati alle forme $\varphi_{\sigma'}$, $\varphi_{\sigma''}$. Supponiamo che si possa stabilire una corrispondenza biunivoca fra le componenti connesse di $P_{\sigma'}$ e quelle di $P_{\sigma''}$ in modo tale che ciascun poligono componente di $P_{\sigma'}$ ed il suo corrispondente abbiano lo stesso numero di lati. Esiste allora una permutazione $\gamma \in S_{2h}$ tale che: *a*) γ induce un'applicazione fra $P_{\sigma'}$ e $P_{\sigma''}$ che muta lati di tipo v in lati di tipo v e lati di tipo w in lati di tipo w; *b*) γ induce sulle parti connesse di $P_{\sigma'}$ la corrispondenza data. Segue che $A(\varphi_{\sigma'}) = \pm A(\varphi_{\sigma''})$. Quindi l'operazione di alternazione sulle forme φ_σ dà risultati distinti (a meno del segno) solo se i poligoni associati P_σ hanno tipo diverso di connessione.

L'osservazione precedente ci permette di scrivere in modo canonico le permutazioni σ, a partire dalle quali si vuole calcolare $A(\varphi_\sigma)$, nel modo seguente. Indichiamo con σ_k il ciclo $\sigma_k = (1\ 2 \cdots k)$. Le permutazioni $\sigma \in S_{2h}$ che consideriamo si decompongono in cicli σ_{2h} potendo un ciclo di lunghezza $2k$ figurare con molteplicità $n_k \geq 0$. Scriveremo

$$\sigma = [n_1, n_2, \cdots, n_r], \sum_{k=1}^{r} 2k\, n_k = 2h$$

intendendo che i numeri $1, 2, \cdots, 2h$ sono raggruppati ordinatamente in n_1 gruppi di due elementi, n_2 gruppi di 4 elementi, etc. sui quali operano le permutazioni σ_2, σ_4, etc.

3. ALTERNAZIONE DELLE FORME $\varphi_{\sigma_{2h}}$

Sia $\sigma_{2h} = (1\ 2 \cdots (2h-1)\ 2h)$. La $\varphi_{\sigma_{2h}}$ si scrive esplicitamente:

$$\varphi_{\sigma_{2h}} = (v_1, v_2)(v_3, v_4) \cdots (v_{2h-1}, v_{2h})(w_2, w_3)(w_4, w_5) \cdots (w_{2h}, w_1)$$

ed il poligono $P_{\sigma_{2h}}$ è evidentemente connesso.

PROPOSIZIONE 3.1. $A(\varphi_{\sigma_{2h}}) = 0$ *per h dispari*,

$A(\varphi_{\sigma_{2h}}) \neq 0$ *formalmente per h pari*.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{H}$ il sottogruppo di S_{2h} che lascia invariato il prodotto $(v_1, v_2)(v_3, v_4)\cdots(v_{2h-1}, v_{2h})$. Poiché in esso si può sia trasporre la coppia di indici $(i, i+1)$ sia commutare due qualunque dei fattori si vede subito che $\mathscr{H}$ è il prodotto semidiretto di S_h e di $Z_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_2$ (h volte).

Si ha quindi:

$$A(\varphi_{\sigma_{2h}}) = \frac{1}{(2h)!} \sum_{\alpha \in S_{2h}} \varepsilon_\alpha (v_{\alpha(1)}, v_{\alpha(2)}) \cdots (v_{(2h-1)}, v_{\alpha(2h)}) (w_{\alpha(2)}, w_{\alpha(3)}) \cdots (w_{\alpha(2h)}, w_{\alpha(1)}) =$$

$$= \frac{1}{(2h)!} (v_1, v_2) \cdots (v_{2h-1}, v_{2h}) \left[\sum_{\gamma \in \mathscr{H}} \varepsilon_\gamma (w_{\gamma(2)}, w_{\gamma(3)}) \cdots (w_{\gamma(2h)}, w_{\gamma(1)}) \right] + \cdots$$

ove i termini omessi contengono ciascuno un prodotto di h prodotti scalari (v_i, v_j) in cui almeno un fattore è relativo ad una coppia di indici (i, j) non consecutivi. Essi si ottengono tutti agendo con $\alpha \notin \mathscr{H}$ sulle v e sommando sugli elementi di $\alpha \mathscr{H}$ per le w.

Sia ora $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$ il sottogruppo delle permutazioni che lasciano invariato il prodotto $(v_1, v_2)\cdots(v_{2h-1}, v_{2h})(w_2, w_3)\cdots(w_{2h}, w_1)$. Si vede subito che $\mathscr{K}$ è isomorfo al sottogruppo delle trasformazioni rigide del poligono $P_{\sigma_{2h}}$ in sé che mutano in sé i lati di tipo v e quelli di tipo w. Esso è quindi isomorfo al sottogruppo generato dalle simmetrie assiali di $P_{\sigma_{2h}}$ e dalle rotazioni di ampiezza $k\pi/h$, per k pari. Ora ogni simmetria assiale di $P_{\sigma_{2h}}$ si ottiene con il prodotto di h trasposizioni sui suoi vertici, e quindi la corrispondente permutazione di $\mathscr{K}$ ha segnatura positiva o negativa a seconda che h sia pari o dispari. Una permutazione che dia luogo ad una rotazione del tipo indicato ha sempre segnatura positiva essendo il quadrato di una permutazione.

Concludendo: $\mathscr{K}$ contiene permutazioni tutte a segnatura positiva se h è pari, contiene una permutazione a segnatura negativa e quindi h permutazioni a segno negativo ed h a segno positivo, se h è dispari.

Da qui segue quindi che il termine

$$(v_1, v_2) \cdots (v_{2h-1}, v_{2h})(w_2, w_3) \cdots (w_{2h}, w_1)$$

appare o no in $A(\varphi_{\sigma_{2h}})$ a seconda che h sia pari o dispari. Poiché in $A(\varphi_{\sigma_{2h}})$ i monomi formalmente distinti (complessivamente nelle v e nelle w) si ottengono in corrispondenza alle classi laterali di $\mathscr{K}$ in S_{2h} segue la tesi.

Indichiamo con $q_i = A(\varphi_{\sigma_{4i}})$. Da quanto appena visto segue che:

$$q_i \in (\Lambda(V \otimes W)^*)^{SO(k) \times SO(n-k)}, \qquad \deg q_i = 4i, q_i \neq 0$$

formalmente per ogni $i = 2, 3, \cdots, n, \cdots$.

Sia ora $\sigma \in S_{2h}$, $\sigma = [n_1, n_2, \cdots, n_r]$, $\sum_{k=1}^{r} 2kn_k = 2h$. Il poligono P_σ si decompone nell'unione disgiunta di poligoni P_{2h} di $2k$ lati, e figurando ciascun poligono P_{2h} un numero $n_k \geq 0$ di volte.

PROPOSIZIONE 3.2. *a) Se nella decomposizione di* P_σ *figura un poligono* P_{2j} *con* $n_j \neq 0$ *e* j *dispari allora* $A(\varphi_\sigma) = 0$.

b) *Se tutti i poligoni* P_{2k} *della decomposizione di* P_σ *che figurano con molteplicità* $n_k \neq 0$ *sono relativi ad interi* k *pari, allora* $A(\varphi_\sigma) \neq 0$ *formalmente e si ha*:

$$A(\varphi_\sigma) = (q_1)^{m_1} \cup (q_2)^{m_2} \cup \cdots \cup (q_s)^{m_s}$$

ove $\cup$ *indica il prodotto cup fra forme alterne e si è posto* $m_1 = n_2, \cdots, m_s = n_{2s} = n_r$.

Dimostrazione a). Supponiamo che nella decomposizione di P_σ figuri effettivamente un poligono P_{2j}, con j dispari. In questo caso il sottogruppo $\mathcal{K}$ delle permutazioni che lasciano invariato il termine $(v_1, v_2) \cdots (v_{2h-1}, v_{2h})$ $(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}) \cdots (w_{(2h-1)}, w_{\sigma(2h)})$ contiene almeno una permutazione di classe dispari (per esempio quella indotta dalla identità su tutti i poligoni P_{2k} per $k \neq j$ e da una simmetria assiale sul poligono P_{2j}. Con ragionamento del tutto analogo a quello della Prop. 3.1 si ottiene la tesi.

b) È subito visto che $A(\varphi_\sigma)$ è formalmente non nulla. Infatti, in questo caso il sottogruppo $\mathcal{K}$ non contiene alcuna permutazione di classe dispari. Basta osservare che le permutazioni di $\mathcal{K}$ inducono trasformazioni del poligono P_σ in sé (mutando lati di tipo v in lati di tipo v e lati di tipo w in lati di tipo w). Queste ultime si ottengono dalle permutazioni che mutano in sé ogni poligono P_{2k} (tutte di classe pari per k pari) e permutando eventualmente fra loro gli n_k poligoni P_{2k}, se $n_k > 1$, queste ultime sono in ogni caso di classe pari perché prodotto di un numero pari di trasposizioni. Per provare la formula del prodotto cup basta osservare che se per esempio

$$\sigma = (1 \cdots k)(k+1 \cdots k+s) = \sigma_k \sigma_s, \quad \varphi_{\sigma_k \sigma_s} = \varphi_{\sigma_k} \otimes \varphi_{\sigma_s}$$

e

$$A(\varphi_{\sigma_k \sigma_s}) = A(\varphi_{\sigma_k}) \wedge A(\varphi_{\sigma_s}).$$

4. LA COOMOLOGIA DI BSO

PROPOSIZIONE 4.1. *La forma* $q_i \in \overset{4i}{\Lambda}(R^k \otimes R^{n-k})^*$ *è non nulla per* $k \geq 2i$, $n - k \geq 2i$.

Dimostrazione. Nelle condizioni poste è possibile scegliere $2i$ vettori $v^{(1)}, \cdots, v^{(2i)} \in R^k = V$ in modo tale che $(v^{(h)}, v^{(k)}) = \delta^{h,k}$.

Effettuiamo una tale scelta, ed in modo analogo siano $w^{(1)}, \cdots, w^{(2i)} \in$ $\in R^{n-k} = W$ tali che $(w^{(h)}, w^{(k)}) = \delta^{h,k}$. Ci proponiamo di far vedere che la q_i è non nulla quando si specializzino i vettori nel modo seguente:

$$v_{2t-1} = v_{2t} = v^{(t)} \quad , \quad t = 1, \cdots, 2i,$$

$$w_{2t} = w_{2t+1} = w^{(t)} \quad , \quad t = 1, \cdots, 2i - 1 \; ; \; w_{4i} = w_1 = w^{(2i)}.$$

Infatti q_i si scrive esplicitamente:

$$q_i = \frac{4i}{(4i)!}(v_1\,,v_2)\cdots(v_{4i-1}\,,v_{4i})\,[(w_2\,,w_3)\cdots(w_{4i}\,,w_1)+\cdots]+\cdots$$

Si vede quindi che la q_i, calcolata per la scelta fatta dei vettori v e w, dà un unico contributo non nullo $\left(\text{uguale a } \frac{1}{(4i-1)!}\right)$ proveniente dal termine esplicitamente indicato; i termini omessi, calcolati, contengono sempre a fattore almeno un termine $(v^{(h)}\,,v^{(k)})$ per $h \neq k$, oppure un termine $(w^{(h)}\,,w^{(k)})$ per $h \neq k$.

PROPOSIZIONE 4.2. *I monomi* $(q_1)^{m_1} \cup (q_2)^{m_2} \cup \cdots \cup (q_r)^{m_r}$ *tali che* $\sum_{j=1}^{r} 4j\,m_j = 4i$, *i fissato, sono linearmente indipendenti come classi di coomologia di De Rham di* $\tilde{G}_k$ *(Grassmanniana stabile dei k-piani orientati di* R^∞*), per* $k \geq 2i$.

Dimostrazione. Per i fissato ordiniamo l'insieme dei monomi in esame nel modo seguente. Dati due monomi$_i$

$$a = (q_1)^{m_1} \cup (q_2)^{m_2} \cup \cdots \cup (q_r)^{m_r} \quad , \quad \sum_{j=1}^{r} 4j\,m_j = 4i\,,$$

$$b = (q_1)^{n_1} \cup (q_2)^{n_2} \cup \cdots \cup (q_s)^{n_s} \quad , \quad \sum_{j=1}^{s} 4j\,n_j = 4i\,,$$

diciamo che $b < a$ se $m_1 = n_1\,,\cdots,m_t = n_t\,,m_{t+1} > n_{t+1}$.

Proveremo il teorema facendo vedere che, per ogni monomio a, si possono specializzare opportunamente i vettori v e w in modo tale che a sia non nullo su tale specializzazione ed i monomi b con $b < a$ siano tutti nulli.

A tal scopo osserviamo che, se denotiamo con σ e σ' le permutazioni canoniche tali che $a = A(\varphi_\sigma)$, $b = A(\varphi_{\sigma'})$, $b < a$, per i poligoni associati P_σ, $P_{\sigma'}$, si ha quanto segue. Essi hanno lo stesso numero di poligoni P_{4j} per $j = 1\,,\cdots,t$; in $P_{\sigma'}$, vi è almeno un poligono $P_{4(t+1)}$ in più rispetto a P_σ, e questo proviene da un poligono di P_σ, con un numero ovviamente maggiore di lati, per degenerazione.

Scegliamo i vettori $v^{(1)},\cdots,v^{(2i)}\,;w^{(1)},\cdots,w^{(2i)}$ come nella dimostrazione della Prop. 4.1; scriviamo $A(\varphi_\sigma)$ analogamente a quanto fatto per la q_i in 4.1, e calcoliamola per la scelta ovvia delle v_i e w_j

$$(v_1 = v_2 = v^{(1)}\,,\cdots,v_{4i-1} = v_{4i} = v^{(2i)}\,;$$

$$w_2 = w_3 = w^{(1)}\,,\cdots,w_{\sigma(4i-1)} = w_{\sigma(4i)} = w^{(2i)})$$

per la quale il primo addendo di $A(\varphi_\sigma)$ è non nullo e tutti gli altri sono nulli.

$A(\varphi_{\sigma'})$ è nulla se calcolata per la stessa specializzazione dei vettori. Infatti, i termini che contengono come fattore il prodotto $(v_1\,,v_2)\cdots(v_{4i-1}\,,v_{4i})$, calcolati, contengono anche almeno un fattore $(w^{(h)}\,,w^{(k)})$ per $h \neq k$; tutti gli altri sono nulli, perché contengono almeno un fattore $(v^{(h)}\,,v^{(k)})$ per $h \neq k$.

PROPOSIZIONE 4.3. $H^*(BSO) = R[q_1, \cdots, q_s, \cdots]$.

Dimostrazione. Discende dalla Prop. 4.2 dopo aver osservato che BSO si ottiene stabilizzando doppiamente la grasmaniana $\tilde{G}_{k,n}$, in questo limite le forme multilineari su $R^k \otimes R^{n-k}$ invarianti per l'azione di $SO(k) \times SO(n-k)$ che si esprimono tramite determinanti, svaniscono.

5. LA COOMOLOGIA DI $BSO(k) = \tilde{G}_k$

Consideriamo $H^*(\tilde{G}_k)$. Esso è generato dalle classi $q_1, \cdots, q_s \cdots$, se k è dispari e tali classi sono invarianti rispetto ad $O(k)$. Se k è pari si devono inoltre considerare quelle forme che provengono per alternazione da forme multilineari su $R^k \otimes R^\infty$ che si esprimono tramite il determinante. Queste ultime non sono invarianti rispetto ad $O(k)$. In particolare, conviene considerare l'elemento:

$$e_{2h} = A([v_1 v_2 \cdots v_{2h}](w_1, w_2) \cdots (w_{2h-1}, w_{2h})), \quad k = 2h.$$

Proposizione 5.1. $H^*(\tilde{G}_{2h+1}) = R[q_1, \cdots, q_h]$ *ove* $q_1, \cdots, q_h$ *sono generatori polinomiali algebricamente indipendenti,*

$H^*(\tilde{G}_{2h}) = R[q_1, \cdots, q_h, e_{2h}]$ *con l'unica relazione* $e_{2h}^2 \in R[q_1, \cdots, q_h]$.

LEMMA 5.2. $H^*(\tilde{G}_2) = R[e_2]$.

Dimostrazione. $H^*(\tilde{G}_2) = (\Lambda(R^2 \otimes R^\infty)^*)^{SO(2) \times SO} = (\Lambda(R^\infty \oplus R^\infty)^*)^{SO(2) \times SO} = (\oplus \overset{i}{\Lambda}(R^\infty) \otimes \overset{j}{\Lambda}(R^\infty))^{*SO(2) \times SO}$.

In $\overset{i}{\Lambda}(R^\infty) \otimes \overset{j}{\Lambda}(R^\infty)$ le forme si ottengono alternando separatamente rispetto ai primi i indici ed agli ultimi j.

Ogni forma multilineare di $i + j$ vettori $u_1, \cdots, u_i, z_1, \cdots, z_j$ invariante per SO è combinazione lineare di prodotti φ di prodotti scalari (u_r, u_s), (z_r, z_s), (u_r, z_s). Se nel prodotto φ figura il fattore (u_r, u_s) oppure (z_r, z_s) esso è simmetrico in due indici o del primo o del secondo insieme di indici e operando la alternazione si annulla.

Pertanto occorre considerare solo forme del tipo:

$$\psi_\sigma = (u_1, z_{\sigma(1)})(u_2, z_{\sigma(2)}) \cdots (u_i, z_{\sigma(i)}), \quad i = j,$$

e la loro alternazione:

$$A(\varphi_\sigma) = \frac{1}{(i)!\,(i)!} \sum_{\alpha \in S_i} \sum_{\beta \in S_i} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta (u_{\alpha(1)}, z_{\beta\sigma(1)}) \cdots (u_{\alpha(i)}, z_{\beta\sigma(i)}).$$

Si ottiene pertanto, a meno del segno, un'unica forma di grado i, i; dalla definizione di prodotto cup segue subito che essa è la potenza i^{ma} della forma $(u, z) \in \Lambda^1(R^\infty)^* \otimes \Lambda^1(R^\infty)^*$.

La forma (u, z), interpretata come forma in $\Lambda^2(R^2 \otimes R^\infty)^*$, si riconosce subito essere la forma e_2. Infatti, abbiamo quanto segue:

$$(R^\infty)^* \otimes (R^\infty)^* \simeq \Lambda^1 (R^\infty)^* \otimes \Lambda^1 (R^\infty)^* \to \Lambda^2((R^\infty)^* \oplus (R^\infty)^*).$$

Con queste inclusioni, ad una forma bilineare φ corrisponde una forma alterna $\bar{\varphi}$ data da $\bar{\varphi}(u_1 + z_1, u_2 + z_2) = \varphi(u_1, z_2) - \varphi(u_2, z_1)$.

Nel caso che ci interessa, la forma è $\varphi(u, z) = (u, z)$.

Nell'ulteriore identificazione di $R^2 \otimes R^\infty = R^\infty \oplus R^\infty$, fatta mediante uso di una base a, b in R^2, i vettori $v_1 \otimes w_1$ e $v_2 \otimes w_2$ vanno rispettivamente in $\lambda_1 w_1 + \mu_1 w_1$ e $\lambda_2 w_2 + \mu_2 w_2$, ove si sono indicate con (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2) rispettivamente le coordinate di v_1 e v_2. Pertanto:

$$\bar{\varphi}(\lambda_1 w_1 + \mu_1 w_1, \lambda_2 w_2 + \mu_2 w_2) = \lambda_1 \mu_2 (w_1, w_2) - \lambda_2 \mu_1 (w_1, w_2) = e_2(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2).$$

Osservazione. Il gruppo ortogonale O (2) è il prodotto dei gruppi SO (2) e Z_2, ove Z_2 è costituito dalla matrice identica e dalla matrice $\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. O (2) opera sulle forme di $\Lambda(R^2 \otimes R^\infty)$, e l'azione di τ è data da $\tau(e_2) = -e_2$.

D'altra parte dal calcolo diretto si ottiene che $e_2 = 2 q_1$; segue quindi che gli invarianti per il gruppo ortogonale sono i polinomi nella classe q_1.

Consideriamo $H^*(\tilde{G}_2 \times \cdots \times \tilde{G}_2)$, ove figurano k copie di $\tilde{G}_2$. Tale anello è un'algebra di polinomi in $x_1, \cdots, x_k$, ove si è indicato con x_i la classe e_2 della componente i^{ma} $H^*(\tilde{G}_2)$.

Consideriamo il toro massimale

$$SO(2) \times SO(2) \times \cdots \times SO(2) \subset SO(2k) \subset SO(2k+1).$$

È noto che i morfismi:

$$H^*(BSO(2k)) \to H^*(\tilde{G}_2 \times \cdots \times \tilde{G}_2)^W$$

$$H^*(BSO(2k+1)) \to H^*(\tilde{G}_2 \times \cdots \times G_2)^W$$

ove con W si è indicato il gruppo di Weyl di $SO(2) \times \cdots \times SO(2)$, sono iniettivi.

PROPOSIZIONE 5.3.

1) $H^*(BSO(2k)) = H^*(\tilde{G}_2 \times \cdots \times \tilde{G}_2)^W = R[\sigma_1, \cdots, \sigma_k, e]$ *ove* σ_i *è la* i^{ma} *funzione simmetrica elementare delle* $x_1^2, x_2^2, \cdots, x_k^2$, $e = x_1 x_2 \cdots x_k$, $e^2 = \sigma_k$.

2) $H^*(BSO(2k+1)) = H^*(\tilde{G}_2 \times \cdots \times \tilde{G}_2)^W = R[\sigma_1, \cdots, \sigma_k]$.

Dimostrazione 1). Sia W' il sottogruppo generato dal gruppo S_k delle permutazioni sui k fattori della decomposizione $R^{2k} = R^2 \oplus \cdots \oplus R^2$ e dagli elementi τ_i, $i = 1, \cdots, k$, ove τ_i è la matrice $2k \times 2k$

$$\tau_i = \begin{vmatrix} I_2 & & & & & \\ & I_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & & & I_2 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & I_2 \end{vmatrix}$$

che contiene la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nel blocco i^{mo}.

$$W' = S_k \amalg Z_2 \times \cdots \times Z_2 \ (k \text{ volte}).$$

Sia ora $W = W' \cap SO(2k) = S_k \amalg H$, ove H è il sottogruppo generato dai prodotti di un numero pari di τ_i esso è il gruppo di Weyl.

W' opera con S_k permutando le classi $x_1, \cdots, x_k$, opera con le τ_i mutando segno alla classe x_i e lasciando fisse le x_j per $i \neq j$. Gli invarianti di $H^*(\tilde{\tilde{G}}_2 \times \cdots \times \tilde{\tilde{G}}_2)$ rispetto a W' si esprimono quindi come polinomi nelle funzioni simmetriche $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ delle $x_1^2, \cdots, x_k^2$. Gli invarianti rispetto a W sono, oltre a quelli invarianti rispetto a W', anche quelli che si esprimono polinomialmente nella classe $e = x_1 \cdots x_k$. Infatti sia f un polinomio nelle $x_1, \cdots, x_k$ invariante rispetto a W. Supponiamo che in esso figuri il monomio

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_k^{i_k} = e^s x_1^{j_1} \cdots x_k^{j_k},$$

ove almeno uno degli esponenti $j_1, \cdots, j_k$ è nullo, sia esso j_k.

Operiamo sul monomio con $\tau_1 \tau_k, \tau_2 \tau_k, \cdots, \in W$: x_1 cambia segno con l'azione di $\tau_1 \tau_k$, x_2 cambia segno con l'azione di $\tau_2 \tau_k$, etc.

Segue che gli esponenti $j_1, \cdots, j_r$ non nulli sono tutti pari. Consideriamo la decomposizione canonica di f, $f = e f_1 + f_2$; f_1 ed f_2 sono polinomi simmetrici nelle $x_1^2, \cdots, x_k^2$.

Pertanto $H^*(\tilde{\tilde{G}}_2 \times \cdots \times \tilde{\tilde{G}}_2)^W = R[\sigma_1, \cdots, \sigma_k] \oplus R[\sigma_1, \cdots, \sigma_k]\, e$.

Prima di concludere, consideriamo l'analogo calcolo per 2).

Dimostrazione 2). Siamo ora nel caso $SO(2) \times \cdots \times SO(2) \subset SO(2k+1)$. Il gruppo $W' = S_k \amalg Z_2 \times \cdots \times Z_2$ ($k+1$ volte) è il gruppo generato dalle permutazioni di S_k (che operano sulla decomposizione di $R^{2k+1} = R^2 \oplus \cdots \oplus R^2 \oplus R$ permutando fra loro i fattori R^2) e dalle matrici $\tau_1, \cdots, \tau_k, \varepsilon$, ove le τ_i sono quelle definite nel caso 1) immerse in $SO(2k+1)$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} I_{2k} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Il gruppo $W = W' \cap SO(2k+1) = S_k \amalg H$, ove H è generato dai prodotti pari di $\tau_1, \cdots, \tau_k, \varepsilon$, è il gruppo di Weyl in questione.

Gli elementi $\tau_i\, \varepsilon$ operano su x_i cambiandone il segno e lasciano fisso x_j per $i \neq j$. Segue che gli invarianti di $H^*(\tilde{\tilde{G}}_2 \times \cdots \times \tilde{\tilde{G}}_2)$ rispetto a W si scrivono come polinomi nelle funzioni simmetriche $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$, di $x_1^2, \cdots, x_k^2$.

Per concludere basta ora osservare che se i morfismi

$$H^* (BSO (2k)) \to H^* (\tilde{\tilde{G}}_2 \times \cdots \times \tilde{\tilde{G}}_2)^W$$

$$H^* (BSO (2k + 1)) \to H^* (\tilde{\tilde{G}}_2 \times \cdots \times \tilde{\tilde{G}}_2)^W$$

sono iniettivi, allora sono anche suriettivi. Infatti, gli elementi di $H^* (BSO (2k)$ (risp. $H^* (BSO (2k + 1))$ che sono invarianti ortogonali formano una sottoalgebra, che si inietta in $H^* (\tilde{\tilde{G}}_2 \times \cdots \times \tilde{\tilde{G}}_2)^W$. Tali algebre hanno la stessa dimensione fino al grado $4k$, (cfr. Prop. $4.2)_j$ ma $H^* (\tilde{\tilde{G}}_2 \times \cdots \times \tilde{\tilde{G}}_2)^W$ è generata dagli elementi in grado $\leq 4k$, pertanto coincidono. Questo conclude quanto affermato in 2) per il caso $2k+1$.

Nell'altro caso, in entrambe le algebre vi è una classe ($e_{2k} \in H^* (BSO (2k))$, $e \in H^* (\tilde{\tilde{G}}_2 \times \cdots \times \tilde{\tilde{G}}_2)^W$ nello stesso grado, invariante solo per il gruppo ortogonale speciale, pertanto l'ultimo generatore va in un elemento della forma $e + f$ con $f \in R[\sigma_1, \cdots, \sigma_k]$, ciò che completa 2).

La dimostrazione di 5.1. segue ora come Corollario da 5.2.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. CARTAN (1929) – *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces*, « Ann. Soc. pol. Math », *8*, 181–225.

[2] J. MILNOR e D. STASHEFF (1974) – *Characteristic classes*, « Annals of Math. Studies », Princeton Univ. Press.

[3] H. IWAMOTO (1949) – *On integral invariants and Betti numbers of Symmetric Reimannian Manifold*, I, II, « Journal of the Math. Soc. of Japan », *1* (2, 3).

[4] H. WEYL (1946) – *The classical groups*, Princeton Univ. Press.