Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Grazia Migliori

Sulle k-calotte complete di $S_{3,q}$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.6, p. 737–743.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_6_737_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Geometrie finite. — *Sulle k–calotte complete di* $S_{3,q}$. Nota di GRAZIA MIGLIORI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We establish two theorems on the embedding of a k-cap in an ovaloid of $S_{3,q} (q > 2)$. Moreover, we prove that $M_4 = q^2 - 2 = 14$, where M_q denotes the maximum number of points that can lie in a non–ovaloid complete cap.

1. INTRODUZIONE

Sia $S_{3,q}$ uno spazio lineare di dimensione 3 sopra un campo di Galois avente caratteristica p e ordine $q = p^h$, [7].

Chiamiamo k–calotta di $S_{3,q}$ un insieme di k punti di questo spazio di cui mai tre risultino allineati, [4], p. 56.

Una retta di $S_{3,q}$ si dice secante, tangente, od esterna alla calotta, a seconda che essa abbia due, uno o nessun punto in comune alla calotta. In modo analogo i piani di $S_{3,q}$ si classificano in secanti, tangenti, esterni a seconda che essi abbiano un numero $k' \geq 2$, uno o nessun punto a comune con la calotta.

Una k–calotta dicesi completa se non è contenuta in una $(k + 1)$–calotta, cioè se per ogni punto di $S_{3,q}$ passa almeno una secante alla k–calotta.

È noto che il valore massimo di k per cui esista in $S_{3,q}$ qualche k–calotta è

$$
\begin{array}{lll}
k = 8 & \text{per } q = 2 & [5], \text{ p. } 64; \quad [9], \text{ p. } 124, \\
k = q^2 + 1 & \text{per } q > 2 & [3], [5].
\end{array}
$$

In corrispondenza a tali valori di k, le k–calotte, necessariamente complete, vengono più precisamente chiamate ovaloidi, [5], p. 57.

Denotiamo con M_q la funzione che definisce il massimo numero di punti appartenenti ad una calotta completa, che non sia ovaloide. I valori M_2 ed M_3, già noti, risultano rispettivamente:

$$
\begin{array}{lll}
M_2 = 5 & [8], & \text{p. } 169, \\
M_3 = 8 & [2], & \text{p. } 250.
\end{array}
$$

Per $q \geq 4$ esistono limitazioni note per M_q e precisamente:

$$
\begin{array}{lll}
(1) \quad M_q \leq q^2 - \sqrt{q}/2 + 1 & & q \text{ pari } [8], \text{ p. } 172, \\
M_q < q^2 & & q = 5 \ [2], \text{ p. } 248, \\
M_q < q^2 - q + 7 & & q > 5 \text{ e dispari } [2], \text{ p. } 248, \\
M_q < q^2 - cq^{3/2} & \text{con} & 0 < c < 1/4, \ q \text{ dispari } [8], \text{ p. } 186, \\
M_q \geq \dfrac{q^2 + q + 4}{2}\,^{(1)} & & [2], \text{ p. } 252.
\end{array}
$$

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1975.

(1) Questo risultato è stato conseguito per q dispari, ma si estende anche subito al caso q pari.

Per $q = 4$, la limitazione (1) porta alla $M_q \leq q^2$; scopo della presente Nota è dimostrare che $M_4 = q^2 - 2 = 14$. Perverremo a ciò stabilendo due teoremi di carattere generale sull'immergibilità di k-calotte, con $k = q^2$ e $k = q^2 - 1$, in un ovaloide di $S_{3,q}$ con $q > 2$.

Colgo l'occasione per ringraziare vivamente il prof. Giuseppe Tallini per la guida datami nello svolgimento del presente lavoro.

2. Premesse sulle calotte di $S_{3,q}$

Dimostriamo la seguente proposizione:

I. *Sia* K *una* $(q^2 - h)$*-calotta di* $S_{3,q}$ *(con* $0 \leq h \leq q - 1$*),* s *una retta secante* K, *per la quale passino* r *sezioni* $(q + 2)$*-archi* $\left(\text{con } r \leq q - h - 3, \frac{q-h}{2}\right)$, *ogni piano per* s *interseca* K *almeno in* $q - h - r$ *punti ed esistono almeno* $q - h - 2r$ *piani, passanti per* s*, che incontrano* K *in un* $(q + 1)$*-arco.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista nel fascio di piani di asse s, oltre alle r sezioni costituite da $(q + 2)$-archi, una sezione con $q - h - r - 1$ punti su K, poichè le $q - r$ rimanenti hanno al più $q + 1$ punti, avremo:

$$q - h - r - 1 + rq + (q - r)(q - 1) \geq q^2 - h$$

e cioè l'assurdo $-1 \geq 0$.

Denotato con n il numero dei piani del fascio che intersecano K in un $(q + 1)$-arco, si ha:

$$2 + n(q - 1) + rq + (q + 1 - r - n)(q - 2) \geq q^2 - h$$

e quindi

$$n \geq q - h - 2r.$$

Se q è dispari ed $r = 0$ si riottiene il risultato noto da Barlotti [2], p. 248.

3. Le q^2-calotte di $S_{3,q}$

Dalla Proposizione I si ha, per $h = 0$ ed $r = 0$, la seguente:

II. *Sia* I *una* q^2*-calotta di* $S_{3,q}$, s *una retta secante* I, *per la quale non passino sezioni* $(q + 2)$*-archi, esistono* q *piani per* s *secanti* I *in un* $(q + 1)$*-arco, mentre il residuo piano per* s *incontra* I *in un* q*-arco.*

Proviamo ora che:

III. *Ogni* q^2*-calotta* I *di* $S_{3,q}$ *è dotata in ogni suo punto, per cui non passino sezioni* $(q + 2)$*-archi, di piano tangente.*

Dimostrazione. Sia P un punto qualsiasi appartenente a I, α un piano per P che incontri I in un $(q+1)$-arco Γ (certamente esiste per la Prop. I) e t la tangente in P a Γ. Consideriamo i piani passanti per t, indicando con h ed n il numero di piani, appartenenti al fascio suddetto, che incontrano I rispettivamente in P solamente o in un q-arco, dovrà risultare:

$$1+n(q-1)+(q+1-h-n)q=q^2,$$

da cui si ha:

$$n-1=q(h-1)\,. \tag{2}$$

Dovendo essere $0 \leq n \leq q$, nella (2) deve essere $h=1$ e quindi $n=1$. Ne segue l'asserto.

Si ha infine:

IV. *Una* q^2*-calotta* I *di* $S_{3,q}$ $(q>2)$, *priva di sezioni* $(q+2)$*-archi, è immergibile in un ovaloide, che è unicamente definito da* I.

Dimostrazione. Ogni punto P, appartenente ad I, individua $q+2$ rette tangenti alla calotta I, $q+1$ fra esse appartengono al piano tangente, la residua evidentemente fuori di esso, verrà detta speciale. Le tangenti speciali sono a due a due incidenti; presi infatti due punti P e Q appartenenti a I, considero il piano π contenente P e la tangente speciale passante per Q; π interseca I in un q-arco (in quanto π contiene due tangenti in Q ad I: la tangente speciale e l'intersezione di π con il piano tangente) che ha in P due tangenti appartenenti a π, di cui una è certamente la tangente speciale passante per P. Le q^2 rette tangenti speciali, incidenti a due a due, non potendo essere complanari, dovranno passare per un unico punto O, aggregabile quindi a I; sia ha così l'asserto.

4. LE (q^2-1)-CALOTTE DI $S_{3,q}$

Dalla Proposizione I del n. 2, valutata per $h=1$ ed $r=0$, segue subito che:

V. *Sia* I *una* (q^2-1)*-calotta di* $S_{3,q}$, s *una retta secante* I, *per la quale non passino sezioni* $(q+2)$*-archi, esistono almeno* $q-1$ *piani per* s *secanti* I *in un* $(q+1)$*-arco, mentre i residui piani del fascio hanno a comune con* I *almeno* $q-1$ *punti*.

Proviamo che:

VI. *Ogni* (q^2-1)*-calotta* I *di* $S_{3,q}$ $(q \geq 4)$, *dotata in ogni suo punto di piano tangente, è immergibile in un ovaloide, che è unicamente definito da* I.

Dimostrazione. Da un qualsiasi punto P appartenente a I escono $q+3$ tangenti, di cui $q+1$ appartengono al piano tangente, le due residue, t_1^P e t_2^P, che chiamerò tangenti speciali, appartengono a un piano α (che chiamerò piano speciale), incontrante I in un $(q-1)$–arco Δ. Comunque si prenda $R \in I$ e fuori di α, il piano β contenente t_1^P e la retta PR, deve contenere una sola delle due tangenti speciali passanti per R (la sua sezione con I risulta un q–arco); denotata con t_1^R tale tangente, sia H il suo punto a comune con t_1^P. Con notazione analoga indicherò t_2^R l'altra tangente speciale per R che incontra t_2^P in un punto K. Voglio dimostrare che le due tangenti speciali, uscenti da ogni altro punto della calotta I, passano una per H e l'altra per K.

Consideriamo prima un generico punto A appartenente a Δ e distinto da P, denotate t_1^A e t_2^A le due tangenti speciali uscenti da A e incidenti rispettivamente le rette t_1^R e t_2^R, risulta chiaro che, essendo t_1^A e t_2^A appartenenti ad α, tali intersezioni coincidono con i punti H e K in cui rispettivamente t_1^R e t_2^R incontrano α.

In modo analogo risulta inoltre che da ogni punto del $(q-1)$–arco Δ', sezione del piano α', individuato da t_1^R e t_2^R, con I, escono due tangenti speciali di cui una passa per H e l'altra per K. Sia infine, Z un punto di I che non appartenga né ad α né ad α', t_1^Z e t_2^Z le tangenti speciali per esso incidenti rispettivamente t_1^R e t_2^R; tenendo conto che t_1^Z deve incontrare, oltre a t_1^R, una tangente speciale per ciascun punto del $(q-1)$–arco Δ, si conclude che t_1^Z passa per H e così pure t_2^Z per K. Da ciò segue che H e K sono aggregabili a I, onde l'asserto.

5. Calotte complete di $S_{3,4}$

Stabiliremo ora una proposizione, relativa alle (q^2-1)–calotte di $S_{3,4}$, analoga a quella già dimostrata (cfr. Prop. III, n. 3) per le q^2–calotte di $S_{3,q}$.

VII. *Ogni* (q^2-1)*–calotta* I *di* $S_{3,4}$ *è dotata in ogni suo punto* P, *per il quale non passino sezioni* $(q+2)$*–archi, di piano tangente.*

Dimostrazione. Sia P un punto appartenente a I, π un piano per P che segni I in una conica Γ e t la tangente a Γ in P. Esaminiamo il fascio di piani, il cui generico denoterò π_j, avente come asse la retta t, indicando con n_i $(i = 1, 2, 3)$ il numero di piani appartenenti a tale fascio e aventi in comune con I $q-2+i$ punti. Deve risultarev erificata la seguente relazione:

$$1 + n_1(q-2) + n_2(q-1) + n_3 q = q^2 - 1 ,$$

da cui

$$(n_1 + n_2 + n_3) q = q^2 - 2 + 2 n_1 + n_2 .$$

Se supponiamo, per assurdo, che nel punto P non esista il piano tangente avremo: $n_1 + n_2 + n_3 = q + 1$ e quindi $q = 2 n_1 + n_2 - 2$, che per $q = 4$ ammette soltanto le due soluzioni seguenti:

$$n_1 = 3 , \quad n_2 = 0 , \quad n_3 = 2 , \qquad \text{e} \quad n_1 = 2 , \quad n_2 = 2 , \quad n_3 = 1 ,$$

In corrispondenza a tali valori non esistono $(q^2 - 1)$-calotte in $S_{3,4}$. Infatti, dalla prima soluzione segue che, nel fascio di piani di asse t, esistono due sezioni coniche e tre sezioni $(q-1)$-archi. Denotate C_1 e C_2 le coniche sezioni di I con i piani π_1 e π_2, esse dovranno avere nuclei distinti, N_1 e N_2 (diversamente, dal nucleo comune uscirebbero $2q+1$ tangenti e la calotta non sarebbe completa, [8], p. 167). I q punti di C_i distinti da P e il nucleo N_i $(i = 1, 2)$ sono i punti di una conica $\Gamma_i \in \pi_i$ di nucleo P; in tali ipotesi un teorema di B. Segre, [7] p. 320, ci assicura l'esistenza del piano tangente in P per una qualsiasi calotta contenente Γ_1 e Γ_2.

Passiamo ora alla seconda soluzione, in corrispondenza alla quale abbiamo, nel fascio di piani di asse t, due sezioni costituite da $(q-1)$-archi sui piani π_4 e π_3, due da q-archi sui piani π_1 e π_2 ed una sezione conica appartenente a un piano π_5. Le $q+3$ tangenti uscenti da P, che chiameremo $t_1 \equiv t, t_2, t_3 \cdots t_7$, dovranno, a meno di inessenziali cambiamenti di indici, essere disposte nel modo seguente:

$$
\begin{array}{lll}
\text{su} & \pi_1 & t_1 \text{ e } t_2, \\
\text{su} & \pi_2 & t_1 \text{ e } t_3, \\
\text{su} & \pi_3 & t_1, t_4 \text{ e } t_5, \\
\text{su} & \pi_4 & t_1, t_6, t_7.
\end{array}
$$

Il piano α individuato dalle due tangenti t_2 e t_3, deve intersecare o il piano π_3 o il piano π_4 in una secante, poiché diversamente avremmo quattro tangenti sullo stesso piano. Nel fascio di piani, avente come asse tale secante s, avremo allora una sezione $(q-1)$-arco, sul piano π_3 o π_4 e un un'altra k-arco, con $k \leq q$. Ciò è assurdo risultando $(q-1)+(q-2)+$ $+(q-1)^2 < q^2 - 1$. Si ha così l'asserto, dal quale si trae, tenuto conto della VI del n. 4, che I è immergibile in un ovaloide.

Ci proponiamo infine di stabilire che:

VIII. *In* $S_{3,4}$ *non esistono* $(q^2 - h)$*-calotte, con* $0 \leq h \leq 1$, *dotate di sezioni* $(q+2)$*-archi.*

Dimostrazione. Possiamo intanto escludere subito che una (q^2-h)-calotta I, di $S_{3,4}$ $(0 \leq h \leq 1)$ possegga almeno due sezioni ovali; se così fosse, infatti, l'intersezione di esse dovrebbe coincidere o con l'insieme vuoto o con una coppia di punti. Rispettivamente nel primo e nel secondo caso, la calotta, costituita dalle due ovali, può estendersi al più in una $(2q+4)$-calotta, [6], p. 314, o in una $(3q+2)$-calotta, [6], p. 319.

Supponiamo allora, per assurdo, che I abbia una sola sezione ovale Ω appartenente a un piano, detto π. Da un qualsiasi punto Q di Ω escono $q+2+h$ tangenti di I, le intersezioni di esse con un piano, non passante per Q, danno un $(q+2+h)$-insieme, K, di $S_{2,4}$. Consideriamo i caratteri $t_0, t_1 \cdots t_d$, [11], p. 72, di K (cioè il numero di rette di $S_{2,4}$ che incontrano K in o, 1 ··· d punti) e le relazioni che fra essi intervengono.

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \sum_{i=0}^{d} t_i = q^2 + q + 1 \\ \sum_{i=1}^{d} i t_i = (q + 2 + h)(q + 1) \\ \sum_{i=2}^{d} i(i - 1) t_i = (q + 2 + h)(q + 1 + h). \end{cases}$$

Osserviamo che t_i rappresenta anche il numero di piani, passanti per Q e secanti I in un $(q + 2 - i)$–arco; risulta allora $t_0 = 1$ per ipotesi e $d = 4$ poiché in Q non esiste piano tangente ad I. Le (3) divengono perciò

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 20 \\ t_1 + 2 t_2 + 3 t_3 + 4 t_4 = (6 + h)\, 5 \\ 2 t_2 + 6 t_3 + 12 t_4 = (6 + h)(5 + h). \end{cases}$$

Se $h = 0$, si vede facilmente che $t_4 = 0$ (ciò si dimostra in modo del tutto analogo a quello seguito per provare la I del n. 1); risulta poi anche $t_3 = 0$, poiché, se esistessero sezioni piane $(q - 1)$–archi, esse dovrebbero avere due punti appartenenti a Ω, e il terzo P, a $I - \Omega$: ma le sezioni piane passanti per la corda PQ sono o q–archi o $(q + 1)$–archi per la II n. 3. Per $h = t_3 = t_4 = 0$ il sistema (4) è incompatibile; ciò dimostra che non esiste alcuna q^2–calotta di $S_{3,4}$ che abbia una sezione ovale.

Per $h = 1$, invece, alle tre equazioni del sistema (4) possiamo aggiungere la

$$\text{(5)} \qquad t_2 + t_3 = q^2 - 1 - (q + 2) = 9,$$

che si ricava dalle seguenti considerazioni: i punti di $I - \Omega$ sono in numero di $q^2 - 1 - q - 2 = 9$, in ciascuno di essi esiste piano tangente alla calotta I (cfr. VII del n. 5). L'insieme di punti $I - \Omega$ è costituito dall'unione dei due sottoinsiemi H e K, essendo H costituito da tutti e soli i punti, i cui piani speciali contengono Q, e K dai rimanenti appartenenti a $I - \Omega$, che non soddisfano tale condizione. Per ogni punto $P \in H$, esiste una e una sola sezione $(q - 1)$–arco passante per Q, quella intersecata dal suo piano speciale; in ciascuna di tali sezioni è contenuto uno e un sol punto appartenente ad H. Perciò $|H| = t_3$. Per ogni punto $R \in K$ passano esattamente due sezioni q–archi, e su ciascuna di esse abbiamo due punti appartenenti a K: risulta perciò $|K| = t_2$. Ponendo $h = 1$ nelle (4) ed aggiungendo ad esse la (5), otteniamo il sistema seguente:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 20 \\ t_1 + 2 t_2 + 3 t_3 + 4 t_4 = 35 \\ 2 t_2 + 6 t_3 + 12 t_4 = 42 \\ t_2 + t_3 = 9, \end{cases}$$

che non possiede soluzione intera. È così dimostrato completamente l'asserto.

Proviamo infine che:

IX. *In* $S_{3,4}$ *esistono calotte complete d'ordine* 14 *e ogni k–calotta con* $k > 14$ *è immergibile in un ovaloide. Ne segue*

$$M_4 = q^2 - 2 = 14.$$

Infatti, dalle Proposizioni IV, VI, VII e VIII si trae che non esistono in $S_{3,4}$ k–calotte complete con $k = q^2$ e $k = q^2 - 1$; un esempio di $(q^2 - 2)$–calotta completa di $S_{3,4}$ è stato dato da B. Segre, [6], p. 319. Da ciò segue l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARLOTTI A. (1955) – *Un'estensione del teorema di Segre–Kustaanheimo*, « Boll. UMI », *10* (3), 498–506.

[2] BARLOTTI A. (1956) – *Un'osservazione sulle k–calotte degli spazi lineari finiti di dimensione tre*, « Boll. UMI », *11* (3), 248–252.

[3] QVIST B. (1952) – *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*, « Ann. Acad. Sci. Fenn. », ser. AI, *134*.

[4] SEGRE B. (1956) – *Intorno alle geometrie sopra un corpo di caratteristica due*, « Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul », Ser. A, 97–123.

[5] SEGRE B. (1959) – *Le geometrie di Galois*, « Ann. di Mat. », *48* (4), 1–96.

[6] SEGRE B. (1959) – *On complete caps and ovaloids in three–dimensional Galois spaces of characteristic two*, « Acta Arith. », *5*, 315.

[7] SEGRE B. (1961) – *Lectures on modern geometry*, Cremonese Ed., Roma,

[8] SEGRE B. (1967) – *Introduction to Galois geometries*, «Memorie dell'Accademia Naz. dei Lincei », *8* (8), 133–236.

[9] TALLINI G. (1956) – *Sulle k–calotte degli spazi lineari finiti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *20* (8), 311–317 e 442–446.

[10] TALLINI G. (1956) – *Sulle k–calotte di uno spazio lineare finito*, « Ann. Mat. Pura e Appl. », *119*.

[11] TALLINI SCAFATI M. (1972) – *Calotte di tipo (m , n) in uno spazio di Galois* $S_{r,q}$, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *53* (8), 71–80.