Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Enrico Arbarello

Alcune osservazioni sui moduli delle curve appartenenti ad una data superficie algebrica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.6, p. 725–732.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_6_725_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Geometria algebrica. — *Alcune osservazioni sui moduli delle curve appartenenti ad una data superficie algebrica.* Nota di ENRICO ARBARELLO, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Certain well known results by B. Segre are generalized by showing a further impossibility of extending for conveniently high values of the genus g a process given by Severi in studying the moduli of algebraic curves. It is also shown that, for $g > 6$, no algebraic system of non-singular algebraic curves of genus g having general moduli can lie on any given algebraic surface.

INTRODUZIONE

In questa Nota si studiano particolari sistemi algebrici di curve di genere g giacenti su superfici algebriche.

Nel § 2, basandosi su alcuni fondamentali risultati dovuti a B. Segre, si dimostra che, per alti valori del genere, non esistono sistemi algebrici di curve a moduli generali, appartenenti a superfici razionali, le cui singolarità (supposte nodali) descrivono certe varietà razionali. Si riesce così, ancora una volta (cf. [S]) ad escludere una possibile via per estendere il metodo usato da Severi nella sua dimostrazione della unirazionalità dello spazio dei moduli delle curve di genere $g < 11$.

Nel § 3, si dimostra che, per $g > 6$, non esistono sistemi algebrici di curve non singolari di genere g a moduli generali giacenti su di una fissata superficie algebrica (non necessariamente razionale).

§ 1. NOTAZIONE E TERMINOLOGIA

In ciò che segue faremo uso delle seguenti definizioni.

DEFINIZIONE 1.1. Sia S una superficie algebrica irriducibile, ridotta e non singolare. Sia V una varietà algebrica, e Ξ una sottovarietà di $S \times V$. La coppia (Ξ , V) è un *sistema algebrico di curve di* S, *sopra* V, se, per ogni $y \in V$, $\Xi_y \doteq \Xi \cdot (S \times \{y\})$ è una curva algebrica contenuta in S.

Ricordiamo inoltre che un sistema algebrico (Ξ , V) si dice irriducibile se V è *irriducibile* e che la *dimensione* di (Ξ , V) è, per definizione, la dimensione di V.

Nel caso in cui $S = \mathbf{P}_2$ si dirà che il sistema algebrico (Ξ , V) è un sistema di *curve piane di grado n* e *genere g* se, per un punto generico $y \in V$, la curva Ξ_y è di grado n e genere g.

(*) Nella seduta del 15 novembre 1975.

Per un fissato n si consideri ora lo spazio proiettivo $\mathbf{P}_N$, $N = \binom{n+2}{2} - 1$, e siano (a_{ij}) coordinate proiettive in $\mathbf{P}_N$. Un punto $(a_{ij}) \in \mathbf{P}_N$, determina in modo univoco la curva piana $\mathscr{C}(a_{ij})$ di grado n data dalla

$$\mathscr{C}(a_{ij}) = \{(X_0, X_1, X_2) \in \mathbf{P}_2 : \Sigma a_{ij} X_0^{n-i-j} X_1^i X_2^j = 0\} .$$

DEFINIZIONE 1.2. Sia V una sottovarietà ridotta di $\mathbf{P}_N$. Il sistema algebrico (Σ, V) di curve piane di grado n si dice *determinato* da V se, per ogni $y \in V$, $y = (a_{ij})$, $\Sigma_y = \mathscr{C}(a_{ij})$. Se V è un sottospazio lineare di $\mathbf{P}_N$ allora il sistema algebrico (Σ, V), determinato da V, è un *sistema lineare*.

Assumiano ora che $V \subset \mathbf{P}^N$ sia una sottovarietà ridotta e che $d = \dim V > 0$. Sia (Σ, V) il sistema algebrico di curve piane determinato da V. Sia y_0 un punto generico di V. Denotiamo con $L_{y_0}(V)$ lo spazio lineare tangente a V in y_0, e consideriamo il sistema lineare di curve piane $(\Sigma^c, L_{y_0}(V))$ determinato da $L_{y_0}(V)$. È facile vedere che le curve di $(\Sigma^c, L_{y_0}(V))$ tagliano su $\Sigma_{y_0}^c = \Sigma_{y_0}$ una serie lineare $g_{n^2}^{d-1}$. Se D_0 è il divisore fisso della $g_{n^2}^{d-1}$, allora la serie lineare $g_m^{d-1} = (g_{n^2}^{d-1} - D_0)$ è per definizione la *serie caratteristica di* (Σ, V) su Σ_{y_0}.

Vale la seguente

PROPOSIZIONE 1.3. (cfr. [Se]). *Sia* (Σ, V) *un sistema irriducibile di curve piane (irriducibili) di grado n e genere g. Sia* $d = \dim V > 0$, *e si assuma che per un generico punto* $y \in V$, *la curva piana* Σ_y *possegga s punti multipli (distinti)* $x_1, \cdots, x_s$ *di rispettive molteplicità* $\nu_1, \cdots, \nu_s$. *Sia m il grado della serie caratteristica* g_m^{d-1} *di* (Σ, V) *su* Σ_y *e i l'indice di specialità della serie completa* $|g_m^{d-1}|$. *Allora*:

$$m \leqq n^2 - \Sigma \nu_i (\nu_i - 1) , \tag{1.4}$$

$$d \leqq 3n + g + i - 1 . \tag{1.5}$$

Concludiamo queste osservazioni preliminari col richiamare le seguenti notazioni.

Sia C una curva piana irriducibile di grado n e genere g. Siano $x_1, \cdots, x_s$ i punti multipli di C, di rispettive molteplicità $\nu_1, \cdots, \nu_s$. Si ponga $H = \Sigma \nu_i x_i$. Si denoterà allora con $|C|_H$ il sistema lineare di tutte le curve piane di grado n passanti per x_i con molteplicità $\mu_i \geqq \nu_i$. Ricordiamo che la *dimensione virtuale* di $|C|_H$ è data da

$$\text{dim. virt.}\ |C|_H = (\tfrac{1}{2})\, n\,(n+3) - (\tfrac{1}{2})\, \Sigma\, \nu_i (\nu_i + 1) \tag{1.6}$$

e quindi

$$\dim |C|_H \geqq \text{dim. virt.}\ |C|_H . \tag{1.7}$$

Infine, il genere g di C è dato da

$$g = (\tfrac{1}{2})(n-1)(n-2) - (\tfrac{1}{2})\, \Sigma \nu_i (\nu_i - 1) . \tag{1.8}$$

§ 2. CURVE NODATE SU DI UNA SUPERFICIE RAZIONALE

Sia M_g lo spazio dei moduli delle curve algebriche di genere g. Com'è noto [cfr. [D – M]] M_g è una varietà quasi–proiettiva irriducibile a dimensione $3g - 3$.

Data una curva C non singolare e di genere g, denoteremo con $m(C)$ il punto di M_g che corrisponde alla classe di equivalenza birazionale di C.

Un sistema algebrico (Ξ, V) di curve di genere g appartenenti a una superficie S determina un'applicazione razionale $m_V : V \dashrightarrow M_g$, definita sull'aperto di Zariski $V' = \{y \in V : g(\Xi_y) = g\}$, ponendo $m(y) = m(\tilde{\Xi}_y)$, dove $\tilde{\Xi}_y$ è la normalizzata di Ξ_y.

Lo studio della struttura globale di M_g, è spesso ricondotto a quello di opportuni sistemi algebrici (Ξ, V) per cui $\overline{m_V(V)} = M_g$, le curve di un tale sistema si dicono a moduli generali.

In [Se] Severi dimostra che per $g \leqq 10$, è possibile trovare dei sistemi algebrici (Σ, V) di curve *piane* a moduli generali per cui lo spazio V dei parametri è razionale, riuscendo così a stabilire la unirazionalità di M_g per $g \leqq 10$.

Questo risultato viene conseguito scegliendo, come sistema algebrico quello delle curve piane di ordine minimo ed osservando che, per $g \leqq 10$, i punti doppi della generica curva del sistema possono assumersi genericamente nel piano. Se si denotano con $x_1(y), \cdots, x_\delta(y)$ i δ punti doppi della curva generica Σ_y, si definisce una applicazione razionale, genericamente surjettica, $\rho_V : V \to (\mathbf{P}_2)^{(\delta)}$ ponendo $\rho_V(y) = (x_1(y), \cdots, x_\delta(y))$, ove $(\mathbf{P}_2)^{(\delta)}$ denota il prodotto simmetrico δ–tuplo di $\mathbf{P}_2$. Posto $H(y) = \Sigma 2\, x_i(y)$, si avrà, con le notazioni del paragrafo precedente, $\rho_\Lambda^{-1}(x_1(y), \cdots, x_\delta(y)) = |\Sigma_y|_{H(y)}$, ciò che mostra la linearità delle fibre di ρ_V. Da ciò segue facilmente che V è razionale, e quindi M_g è unirazionale per $g \leqq 10$.

La dimostrazione di Severi si basa dunque sull'esistenza, per $g \leqq 10$, di un sistema (Σ, V) di curve piane tale che

(2.1) $\overline{m_V(V)} = M_g$ (ossia, curve a moduli generali).

(2.2) La curva generica di (Σ, V) ha δ punti doppi.

(2.3) $\overline{\rho_V(V)} = (\mathbf{P}_2)^{(\delta)}$ (ossia, i punti doppi possono scegliersi genericamente in $\mathbf{P}_2$).

È facile verificare che per $g > 10$ un sistema (Σ, V) soddisfacente (2.1), (2.2) e (2.3) non esiste. Ogni estensione del metodo di Severi dovrà quindi comportare una modifica nelle condizioni (2.2) e (2.3). È quindi naturale chiedersi se si riesca, in tale intento, a modificare *solo una* delle condizioni (2.2) e (2.3).

CASO I. Se vogliamo conservare (2.3), la condizione (2.2) si dovrà modificare nel senso che dovranno essere permessi punti singolari di arbitraria molteplicità.

Questo caso è stato analizzato da B. Segre in [S], e nel seguente teorema egli dimostra l'impossibilità di estendere il metodo di Severi in questo primo caso.

TEOREMA 2.4 (B. Segre). *Sia* (Σ, V) *un sistema algebrico irriducibile di curve piane di grado* n *e genere* $g > 36$. *Si assuma che la curva generica di* (Σ, V) *abbia* s *punti multipli e si supponga inoltre che questi punti multipli possano assumersi genericamente in* $\mathbf{P}_2$. *Allora le curve di* (Σ, V) *sono a moduli particolari (ossia* $\overline{m_V(V)}$ *è una sottovarietà propria di* M_g).

Nello stabilire questo risultato, B. Segre ottiene e fa uso del seguente Lemma, che sarà anche essenziale nel nostro studio.

LEMMA 2.5 (B. Segre). *Sia* (Σ, V) *un sistema algebrico di curve piane, di genere* $g > 36$, *tale che* $\overline{m_V(V)} = M_g$. *Siano, per un punto generico* $y \in V$, $x_1(y), \cdots, x_s(y)$ *i punti multipli di* Σ_y, *e sia* ν_1 *la molteplicità di* $x_i(y)$.

Posto $H(y) = \Sigma \nu_i X_i(y)$, *allora*:

$$\dim |\Sigma_y|_{H(y)} = 0 , \quad \text{dim. virt. } |\Sigma_y|_{H(y)} < -g .$$

CASO II. Se si vuole conservare la condizione (2.2), allora la condizione (2.3) dovrà modificarsi nel senso che si potrà assumere che $\overline{\rho_V(V)} \subset \mathbf{P}_2^{(\delta)}$ sia una sottovarietà razionale di $\mathbf{P}_2^{(\delta)}$.

Nell'analizzare questo caso, limiteremo la nostra attenzione a particolari sottovarietà razionali di $\mathbf{P}_2^{(\delta)}$. Più specificamente il nostro obiettivo sarà quello di decidere se esistano sistemi algebrici (Σ, V) di curve piane di genere $g > 10$ tali che.

(2.6) $$\overline{m_V(V)} = M_g;$$

(2.7) la generica curva Σ_y di (Σ, V) ha σ punti singolari fissi e δ nodi;

(2.8) tra i δ nodi, l variano genericamente lungo curve razionali di $\mathbf{P}_2$ e i rimanenti possono essere presi genericamente sul piano (cosicchè $\overline{\rho_V(V)} \subset \mathbf{P}_2^{(\delta)}$ è razionale).

Il fatto che in (2.8) si permettono delle singolarità fisse, già suggerisce che l'ambiente più naturale per il nostro sistema algebrico è la superficie razionale che si ottiene, da $\mathbf{P}_2$, per dilatazione dei σ punti singolari fissi delle curve di (Σ, V).

Poniamo quindi l'ipotesi più generale che le curve del nostro sistema algebrico giacciano su una superficie razionale, S.

Sia dunque (Ξ, V) un sistema algebrico irriducibile di curve irriducibili di genere g, su di una superficie razionale e non–singolare. Porremo, come al solito, $m_V : V \to M_g$, ove $m_V(y) = m(\tilde{\Xi}_y)$.

Siano ora $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_l$, l curve distinte di S e si assuma che, per un punto generico $y \in V$, Ξ_y abbia δ punti doppi $x_1(y), \cdots, x_\delta(y)$ tali che

$$x_j \in \Gamma_i \quad , \quad r_{i-1} + 1 \leqq j < r_i \ , \qquad i = 1, \cdots, l$$

ove

$$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_l \leqq \delta \, .$$

Sia $s_i = r_i - r_{i-1}$, si denoti con $\Gamma_i^{(s_i)}$ il prodotto simmetrico s_i-plo di Γ_i, e con $S^{(\delta - r_l)}$ il prodotto simmetrico $(\delta - r_l)$-plo di S.

Si definisce quindi un'applicazione razionale

$$\rho_{V,S} : V \to \Gamma_1^{(s_1)} \times \cdots \times \Gamma_l^{(s_2)} \times S^{(\delta - r_l)}$$

ponendo

$$\rho_{V,S}(y) = (x_1(y), \cdots, x_\delta(y)). \tag{2.9}$$

Ferme queste notazioni, il seguente teorema ci dice che, anche in questo caso, il metodo di Severi non si può estendere.

TEOREMA 2.10. *Sia* S *una superficie razionale non-singolare. Sia* (Ξ, V) *un sistema algebrico irriducibile di curve di* S *di genere* $g > 36$. *Siano* $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_l$, l *curve di* S *e si assuma che per un punto generico* $y \in V$, *la curva* Ξ_y *abbia* δ *nodi e che* $\overline{\rho_{V,S}(V)} = \Gamma_1^{(s_1)} \times \cdots \times \Gamma_l^{(s_l)} \times S^{(\delta - r_l)}$; *allora* $\overline{m_V(V)}$ *è una sottovarietà propria di* M_g.

Dimostrazione. Assumiamo $\overline{m_V(V)} = M_g$. Sia $\varphi : S \to \mathbf{P}_2$ un'applicazione birazionale. Per un punto generico $y \in V$, sia n il grado della curva $\varphi(\Xi_y)$. Il sistema algebrico (Ξ, V) si lascerà quindi trasformare, tramite la φ, in un sistema algebrico (Σ, V) di curve piane di genere g e grado n.

Si ponga $\Lambda_i = \varphi(\Gamma_i)$ e si supponga che $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_\tau$, $\tau \leqq l$ siano quelle curve Γ che non sono trasformate, tramite la φ, in punti di $\mathbf{P}_2$. Potremo quindi concludere che la curva generica Σ_y del sistema (Σ, V) ha $l - \tau = \sigma$ punti multipli fissi, $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_\sigma$, di rispettive molteplicità $\nu_1, \cdots, \nu_\sigma$ e δ' nodi $x_1(y), \cdots, x_{\delta'}(y)$. Come al solito, si definisce un'applicazione razionale

$$\rho_{V,\mathbf{P}_2} : V \to \{\bar{x}_1\} \times \cdots \times \{\bar{x}_\sigma\} \times \Lambda_1^{(s_1)} \times \cdots \times \Lambda_\tau^{(s_\tau)} \times \mathbf{P}_2^{(\delta' - r_\tau)} \ ,$$

dove $r_\tau = \Sigma s_i$, ponendo

$$\rho_{V,\mathbf{P}_2}(y) = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_\sigma, x_1(y), \cdots, x_{\delta'}(y)) \, .$$

Dalle ipotesi fatte segue che

$$\rho_{V,\mathbf{P}_2}(V) = \{\bar{x}_1\} \times \cdots \times \{\bar{x}_\sigma\} \times \Lambda_1^{(s_1)} \times \cdots \times \Lambda_\tau^{(s_\tau)} \times \mathbf{P}_2^{(\delta' - r_\tau)} \, . \tag{2.11}$$

Per un punto generico $y \in V$ poniamo $H(y) = \Sigma \nu_i x_i + \Sigma 2 x_i(y)$.

Si ha quindi $\rho_{V,\mathbf{P}_2}^{-1}(\rho_{V,\mathbf{P}_2}(y)) \subset |\Sigma_y|_{H(y)}$ e, essendo $g > 36$, possiamo concludere, per il Lemma 2.5, che

$$\dim \rho_{V,\mathbf{P}_2}^{-1}(\rho_{V,\mathbf{P}_2}(y)) = 0 \, .$$

Da ciò e dalla (2.11) segue che

$$\dim(\mathrm{V}) = \dim \overline{\rho_{\mathrm{V},\mathbf{P}_2}(\mathrm{V})} = 2\,\delta' - r_\tau\,. \tag{2.12}$$

Dal Lemma 2.5, dalla (1.6) e dalla (1.8) si trae che

$$\text{dim. virt. } |\Sigma_y|_{\mathrm{H}(y)} < -g\,, \tag{2.13}$$

$$\text{dim. virt. } |\Sigma_y|_{\mathrm{H}(y)} = (1/2)\,n\,(n+3) - (1/2)\,\Sigma\nu_i\,(\nu_i + 1) - 3\,\delta'\,, \tag{2.14}$$

$$g = (1/2)\,(n-1)\,(n-2) - (1/2)\,\Sigma\nu_i\,(\nu_i - 1) - \delta'\,. \tag{2.15}$$

Distinguiamo ora due casi: *a*) $\delta' > r_\tau$, *b*) $\delta' = r_\tau$.

CASO a): Sia $y_0 \in \mathrm{V}$ un punto generico, sia $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}$ la varietà bidimensionale definita da

$$\mathrm{V}' = \rho^{-1}_{\mathrm{V},\mathbf{P}_2}(\{\bar{x}_1\} \times \cdots \times \{\bar{x}_\sigma\} \times \{x_1(y_0)\} \times \cdots \times \{x_{\delta'-1}(y_0)\} \times \mathbf{P}_2).$$

Sia (Σ', V') il sistema algebrico di curve piane irriducibili determinato da V'. Si noti che se $y \in \mathrm{V}'$ allora $\Sigma'_y = \Sigma_y$, e che i punti singolari di Σ_y sono $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_\sigma, x_1(y_0), \cdots, x_{\delta'-1}(y_0), x_{\delta'}(y)$.

Sia $g^1_{m'}$ la serie caratteristica di (Σ', V') su Σ_y.

Poichè $x_{\delta'}(y)$ è l'unico punto multiplo variabile del sistema, avremo

$$m' \leqq n^2 - \Sigma\nu_i^2 - (\delta' - 1)\,2^2 - 2\,(2-1) = n^2 - \Sigma\nu_i^2 - 4\,\delta' + 2. \tag{2.16}$$

Si ha inoltre (cfr. (2.14), (2.15))

$$\text{dim. virt. } |\Sigma_y|_{\mathrm{H}(y)} = n^2 - \Sigma\nu_i^2 - 4\,\delta' + 2 - g - 1\,. \tag{2.17}$$

La (2.16) e la (2.17) dànno

$$m' \leqq \text{dim. virt. } |\Sigma_y|_{\mathrm{H}(y)} + g + 1\,. \tag{2.18}$$

Ora il Lemma (2.5) e la (2.18) forniscono $m' < 1$, il che è assurdo.

CASO b): Sia $y_0 \in \mathrm{V}$ un punto generico di V, sia $\mathrm{V}'' \subset \mathrm{V}$ la varietà bidimensionale definita da

$$\mathrm{V}'' = \rho^{-1}_{\mathrm{V},\mathbf{P}_2}(\{\bar{x}_1\} \times \cdots \times \{\bar{x}_\sigma\} \times \{x_1(y_0)\} \times \cdots \times \{x_{\delta'-2}(y_0)\} \times \Lambda_{\tau-1} \times \Lambda_\tau).$$

Procedendo come nel caso a), consideriamo la serie caratteristica $g^1_{m''}$ di (Σ'', V'') su Σ_y. Troviamo

$$\begin{aligned} m'' &\leqq n^2 - \Sigma\nu_i^2 - (\delta' - 2)\,2^2 - 2\,(2-1) - 2\,(2-1) = \\ &= n^2 - \Sigma\nu_i^2 - 4\,\delta' + 4\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

La (2.17) e il Lemma (2.5) dànno in questo caso $m'' \leqq 2$, il che è assurdo dal momento che le curve di (Σ, V) sono a moduli generali e quindi non iperellittiche.

Resta così dimostrato che $\overline{m_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})} \neq \mathrm{M}_g$.

§ 3. UN'OSSERVAZIONE SUI SISTEMI ALGEBRICI DI CURVE NON-SINGOLARI APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE

Il problema che ci poniamo in questo paragrafo è quello di decidere se sia possibile trovare, su di una superficie algebrica S fissata, un sistema algebrico di curve non-singolari di genere g a moduli generali. Vedremo che ciò è impossibile non appena sia $g > 6$. Nel nostro studio utilizzeremo il seguente fondamentale risultato, dovuto a G. Castelnuovo (cfr. [C]).

TEOREMA 3.1 (Castelnuovo). *Se* (Σ, V) *è un sistema lineare di curve piane di genere* $g > 6$, *allora* $\overline{m_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})}$ *è una sottovarietà propria di* M_g.

TEOREMA 3.2. *Sia* S *una superficie algebrica non-singolare. Sia* (Ξ, V) *un sistema algebrico di curve non-singolari di genere* $g > 6$ *appartenenti a* S; *allora* $\overline{m_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})}$ *è una sottovarietà propria di* M_g.

Dimostrazione. Supponiamo $\overline{m_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})} = \mathrm{M}_g$. Sia K_{S} il divisore canonico di S. Sia $y \in \mathrm{V}$ un punto generico. La formula di aggiunzione (cfr. [Š]) porge

$$2g - 2 = \Xi_y (\Xi_y + \mathrm{K}_{\mathrm{S}}) . \tag{3.3}$$

Sia $d = \dim \mathrm{V}$. Sia $m = (\Xi_y \cdot \Xi_y)$ il grado della serie caratteristica g_m^{d-1} di (Ξ, V) su Ξ_y. Poichè $d \geqq 3g - 3$, segue dal teorema di Riemann-Roch che la serie $|g_m^{d-1}|$ è non speciale e che

$$3g - 2 \leqq d - 1 \leqq m - g = (\Xi_y \cdot \Xi_y) - g.$$

Questa diseguaglianza e la (3.3) dànno

$$(\Xi_y \cdot \mathrm{K}_{\mathrm{S}}) \leqq -2g < 0 ,$$

e questa implica a sua volta che tutti i plurigeneri di S sono eguali a zero. Per il Teorema di Enriques si ha quindi che S è rigata: $\mathrm{S} = \mathrm{B} \times \mathbf{P}^1$, dove B è una curva non-singolare. Poichè $\Xi_y \subset \mathrm{S}$, abbiamo un'applicazione razionale $\Xi_y \to \mathrm{B}$. Ma abbiamo supposto che Ξ_y sia a moduli generali e quindi B risulta una curva razionale.

Ne segue che S è razionale. Sia $\varphi : \mathrm{S} \to \mathbf{P}_2$ un'applicazione birazionale. Siano $\mathrm{C}_1, \cdots, \mathrm{C}_\tau$ le curve di S che vengono trasformate in punti di $\mathbf{P}_2$ tramite la φ. Poniamo, per un generico $y \in \mathrm{V}$, $\nu_i = (\Xi_y \cdot \mathrm{C}_i)$, e sia $\mathrm{H}(y) = \Sigma \nu_i \varphi(\mathrm{C}_1)$.

Si avrà quindi che il sistema (Σ, V), trasformato di (Ξ, V) mediante la φ, è contenuto nel sistema lineare $|\varphi(\Xi_y)|_{\mathrm{H}(y)}$. Il teorema da stabilire è così un corollario del Teor. 3.1.

BIBLIOGRAFIA

[C] G. CASTELNUOVO (1892) – *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*, « Mem. Accad. Sc. », Torino, ser. II, *42*.

[D–M] P. DELIGNE e D. MUMFORD (1970) – *The irreducibility of the space of curves of given genus*, « Publ. I.H.E.S. », *36*.

[S] B. SEGRE (1930) – *Sui moduli delle curve algebriche*, « Ann. Mat. pura appl. », ser. IV, V. *7*.

[Se] F. SEVERI (1921) – *Vorlesungen über algebraische geometrie*, Leipzig.

[Š] I. R. SAFAREVIC (1967) – *Algebraic Surfaces*, « Proc. Steklov Inst. of Math., Am. Math. Soc. Providence, R. I. ».