

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

CLAUDIO CITRINI

**Sull'urto parzialmente elastico o anelastico di una  
corda vibrante contro un ostacolo. Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 59 (1975), n.6, p. 667–676.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1975\\_8\\_59\\_6\\_667\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_6_667_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Analisi matematica.** — *Sull'urto parzialmente elastico o anelastico di una corda vibrante contro un ostacolo.* Nota II di CLAUDIO CITRINI, presentata (\*) dal Corrisp. L. AMERIO.

SUMMARY. — We give the proofs of Lemma 3 and Theorem 3 of Note I: "In the anelastic case, the number of impacts of a string vibrating against a wall is always finite".

#### § 4. DIMOSTRAZIONI DEL LEMMA 3 E DEL TEOREMA 3

LEMMA 3. Sappiamo che per  $j \geq 2$  la  $j$ -esima linea di influenza contiene al più una coppia  $(m)$ , diciamo  $P_j Q_j R_j$ ; è inoltre  $y(Q_j) = K - \alpha_j < K$ .

1) Consideriamo la (eventuale) coppia  $(m)$  di  $\lambda_3$ , e mostriamo che *il punto*  $Q_2$  *è interno al rettangolo*  $P_3 Q_3 R_3 S_3$ .

Risulta infatti  $y(B_2) = -K - \alpha_2$ ; inoltre (fig. 5):

$$y(Q_3) = y(T_3) + y(R_3) - y(W_3) = y(T_3) + K - y(W_3)$$

$$y(T_3) = y(B_2) + y(P_3) - y(V_3) = -K - \alpha_2 + K - y(V_3) = -\alpha_2 - y(V_3)$$

da cui sommando

$$(4.1) \quad y(Q_3) = K - \alpha_2 - y(V_3) - y(W_3) = K - \alpha_3.$$

Poichè  $y(Q_3) < K$ , deve essere  $\alpha_3 = \alpha_2 + y(V_3) + y(W_3) > 0$ .

Supponiamo  $V_3 \in \tilde{Q}_2 B_2$ . Risulta allora  $y(\tilde{Q}_2) = y(\tilde{P}_2) + y(Q_2) - y(P_2) = 0 + (K - \alpha_2) - K = -\alpha_2$  (cfr. punto 1 d) sulle proprietà dell'urto anelastico), ed inoltre  $y(V_3) \leq y(\tilde{Q}_2) = -\alpha_2$ ; ma, essendo  $y(W_3) \leq 0$ , dalla (3.8) segue  $\alpha_3 \leq \alpha_2 - \alpha_2 + 0 = 0$ , assurdo. Pertanto  $V_3 \notin \tilde{Q}_2 B_2$ , ed analogamente  $W_3 \notin \tilde{Q}_2 B_2$ , e quindi il punto  $Q_2$  è interno al rettangolo  $P_3 Q_3 R_3 S_3$ . Lo stesso ragionamento si applica tra  $\lambda_j$  e  $\lambda_{j+1}$ ,  $j \geq 3$ .

2) Mostriamo ora in *a*) e *b*), che *in tutta la spezzata*  $Q_2' Q_3 Q_2^*$  *risulta*  $y \leq K - \alpha_3 = y(Q_3)$ .

*a*) Supponiamo  $V_3 \in \tilde{P}_2 \tilde{Q}_2$ . È allora in tutto  $X_3 P_3$ :  $y \leq K = y(P_3)$ , e pertanto in  $Q_2^* Q_3$  è  $y \leq K - \alpha_3 = y(Q_3)$ .

Analogamente, se  $W_3 \in \tilde{Q}_2 \tilde{R}_2$ , si ha  $y \leq K - \alpha_3$  in  $Q_2' Q_3$ .

(\*) Nella seduta del 15 novembre 1975.

b) Supponiamo  $W_3 \in C_2 \bar{R}_2$ . È allora, necessariamente,  $y(W_3) = 0$ . Infatti è  $y(\bar{R}_2) = 0$  (cfr. la fig. 1, scambiando AB con CB), e  $y(R_2^*) = y(R_3) + y(\bar{R}_2) - y(W_3) = K + 0 - y(W_3)$ ; se fosse dunque  $y(W_3) < 0$ , risulterebbe  $y(R_2^*) > K$ , assurdo. In tutto il segmento  $R_2 R_2^*$  è allora  $y \leq K = y(R_2^*)$ , e quindi in  $Q_2' Q_3$  è  $y \leq K - \alpha_3 = y(Q_3)$ . Analogamente se  $V_3 \in A_2 \tilde{P}_2$  si ha  $y \leq K - \alpha_3$  in  $Q_3 Q_2^*$ . In ogni caso è quindi  $y \leq K - \alpha_3 = y(Q_3)$  in  $Q_2' Q_3 Q_2^*$ .

3) Consideriamo ora la linea  $\lambda_4$ , ammettendo che anch'essa contenga una coppia  $(m)$ ,  $P_4 Q_4 R_4$  (fig. 6). Mostriamo che il punto  $Q_2$ , è *interno* anche al rettangolo  $P_4 Q_4 R_4 S_4$  (che, per quanto provato in 1), contiene il punto  $Q_3$ ).

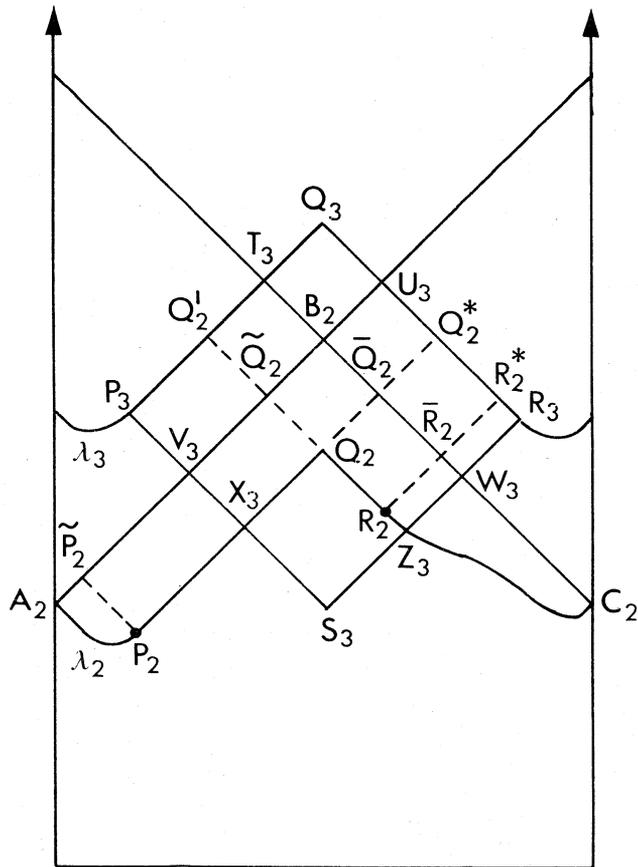


Fig. 5.

Ciò è evidente se  $P_4 Q_4 R_4 S_4$  contiene la spezzata  $P_3 Q_3 R_3$ . Supponiamo quindi, ad esempio, che il lato  $P_4 S_4$  intersechi  $P_3 Q_3$  in  $X_4$ , e mostriamo che  $X_4 \in P_3 Q_2$  ( $Q_2'$  escluso). Se infatti fosse  $X_4 \in Q_2' Q_3$  sarebbe  $y(X_4) \leq K - \alpha_3$ , da cui  $y(V_4) = y(X_4) - K \leq -\alpha_3$  (cfr. punto 1 d) sull'urto anelastico), e quindi, per la (3.8) con gli indici incrementati di 1,  $y(Q_4) \geq K$ , assurdo.

4) Come al punto 2) si mostra poi che è  $y \leq K - \alpha_4$  in  $Q_3' Q_4 Q_3^*$ . Essendo ora in  $Q_2' Q_3$ :  $y \leq y(Q_3)$ , ne segue che in  $Q_2'' Q_3'$  è  $y \leq y(Q_3) \leq K - \alpha_4$ : analogamente si ragiona in  $Q_3^* Q_2^{**}$ . Si deduce perciò che risulta  $y \leq K - \alpha_4$  in tutta la spezzata  $Q_2'' Q_4 Q_2^{**}$ .

5) Ragioniamo ora per induzione. Supponiamo che la linea  $\lambda_n$  possenga una coppia  $(m)$  e che siano verificate le due ipotesi:

a) il punto  $Q_2$  è interno al rettangolo  $P_n Q_n R_n S_n$ , b) dette  $Q_2^{n*}$  e  $Q_2^{(n)}$  le proiezioni di  $Q_2$  rispettivamente sui segmenti  $Q_n R_n$  e  $P_n Q_n$ , risulta  $y \leq K - \alpha_n$  in tutta la spezzata  $Q_2^{n*} Q_n Q_2^{(n)}$ .

Ragionando quindi come al punto 3) si vede che  $Q_2$  è interno al rettangolo  $P_{n+1} Q_{n+1} R_{n+1} S_{n+1}$  (basta sostituire 3 con  $n$  e 4 con  $n + 1$ ).

Si mostra poi che  $y \leq K - \alpha_{n+1}$  sulla spezzata  $Q_2^{(n+1)*} Q_{n+1} Q_2^{(n+1)*}$ , con un ragionamento analogo a quello del punto 4). Ne segue che le proprietà a) e b) sono verificate anche  $\lambda_{n+1}$ , e pertanto esse sono vere per ogni  $n$ .

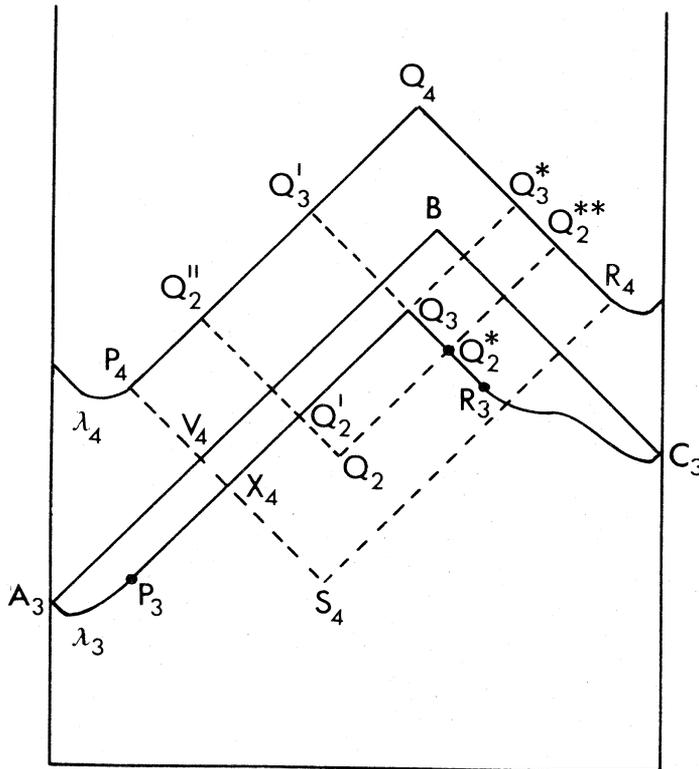


Fig. 6.

6) Il processo non può continuare che un numero *finito* di volte, in quanto la distanza tra due linee di influenza è non minore di una quantità positiva, indicata dal Teorema 1.

Esiste pertanto una linea  $\lambda_j$  che non contiene coppie  $(m)$ . La seconda parte del lemma è allora immediata. Infatti (fig. 6) se ad esempio  $\lambda_2$  non possiede coppie  $(m)$  è  $\alpha_2 = 0$ ; ma  $y(V_3) \leq 0, y(W_3) \leq 0$ , quindi per la (4.1)  $y(Q_3) \geq K$ , cioè anche  $\lambda_3$  non possiede coppie  $(m)$ .

TEOREMA 3. Dal Lemma 3 sappiamo che esiste una linea di influenza  $\lambda$  che non contiene coppie  $(m)$ , e che anche le successive linee di influenza non possono contenere coppie  $(m)$ . È pertanto sufficiente mostrare che *esiste una linea sulla quale risulta verificata la condizione  $y(x, t(x)) \geq 0$* ; tale linea, per il Lemma 1, risulterà l'ultima.

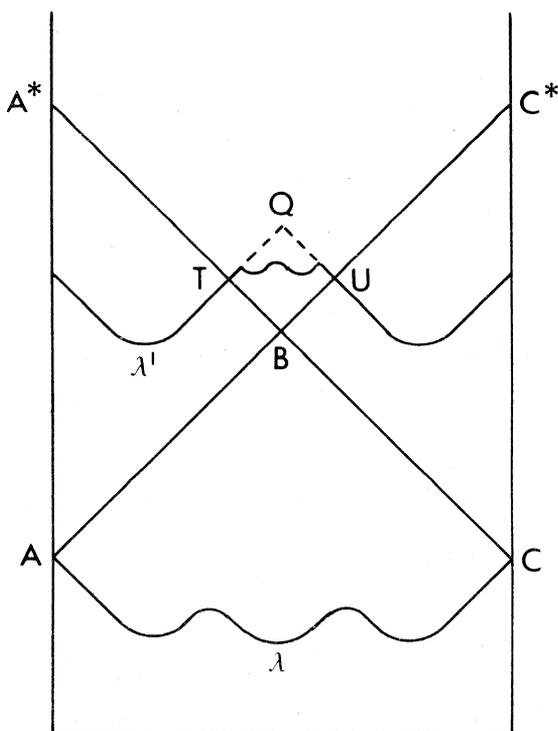


Fig. 7.

Consideriamo quindi (fig. 7) la prima linea di influenza  $\lambda$  che non contiene coppie  $(m)$ , e siano AB e BC i segmenti di caratteristica condotti dagli estremi di  $\lambda$ ; nella zona delimitata da  $\lambda$  e dalla spezzata ABC è senz'altro  $y \leq K$ . Poniamo  $F(\xi) = y(\xi, \eta_A)$ ,  $a \leq \xi \leq b$ ,  $G(\eta) = y(\xi_B, \eta)$ ,  $a' \leq \eta \leq a$ . Per l'analisi svolta in precedenza,  $F(\xi)$  è una funzione continua, la cui derivata  $F'(\xi)$  ammette al più un numero finito di discontinuità di prima specie, e si annulla in un numero finito di punti e di intervalli.

Consideriamo ora le due possibili alternative:

$$(^{\circ}) \quad \max_{a \leq \eta \leq \xi \leq b} \{F(\xi) - F(\eta)\} \leq K, \text{ cioè } \forall \eta \leq \xi \text{ è } F(\xi) - F(\eta) \leq K;$$

$$(^{\circ\circ}) \quad \max_{a \leq \eta \leq \xi \leq b} \{F(\xi) - F(\eta)\} > K, \text{ cioè } \exists \bar{\eta} \leq \bar{\xi} / F(\bar{\xi}) - F(\bar{\eta}) > K.$$

Poichè la soluzione del problema di Goursat entro  $ABA^*$  è data da  $y(\xi, \eta) = F(\xi) - F(\eta)$ , la ipotesi  $(^0)$  garantisce che la linea di influenza  $\lambda'$ , successiva della  $\lambda$ , si trovi tutta al di sopra del segmento  $A^*B$  o su questo, mentre la  $(^{00})$  implica che entro il triangolo  $ABA^*$  esiste almeno parte di un arco d'urto di  $\lambda'$ .

Analoghi risultati valgono per il triangolo  $CBC^*$ ; dobbiamo pertanto distinguere tre possibili combinazioni: con ovvio significato dei simboli, le indicheremo con  $(^0-^0)$ ,  $(^0-^{00})$  ( $^0$ , equivalentemente,  $(^{00}-^0)$ ) e  $(^{00}-^{00})$ .

*Caso  $(^0-^0)$ .* Studiamo il problema di Darboux nel rettangolo  $A^*BC^*B^*$ . Come già mostrato nella dimostrazione del Lemma 1, la soluzione lungo il lato  $A^*B$  è data dalla (3.5), e vale  $F_0(\eta) = -K - F(\eta)$ . La funzione  $F_0(\eta)$  gode delle seguenti proprietà, conseguenze di quelle di  $F$  e della  $(^0)$ :

$$(4.2) \quad \begin{aligned} F_0(a) &= -K; & F_0(b) &= 0; & -K &\leq F_0(\eta) \leq K \\ \forall \eta' \leq \eta'' : F_0(\eta'') &\geq F_0(\eta') - K. \end{aligned}$$

Analoghe proprietà valgono per  $G_0(\xi)$ ,  $b \leq \xi \leq c$ , che rappresenta la soluzione in  $BC^*$ . La soluzione del problema di Darboux in  $A^*BC^*B^*$  è data da

$$(4.3) \quad y(\xi, \eta) = G_0(\xi) + F_0(\eta) + K \quad (b \leq \xi \leq c, a \leq \eta \leq b).$$

Siano ora (fig. 8):

$$\begin{aligned} \eta_M &= \min \{ \eta \mid F_0(\eta) = \text{massimo assoluto} \} \\ \xi_M &= \min \{ \xi \mid G_0(\xi) = \text{massimo assoluto} \}. \end{aligned}$$

Se  $F_0(\eta_M) = G_0(\xi_M) = 0$ , non esistono altre linee di influenza (siamo nel caso del Lemma 1). Supponiamo quindi, ad esempio, che sia  $0 < F_0(\eta_M) \leq K$ . Esiste allora almeno una radice dell'equazione

$$(4.4) \quad F_0(\eta_M) + G_0(\xi) = 0$$

in cui  $G_0$  sia crescente a destra in senso stretto; indichiamo con  $\xi_1$  la più piccola di tali radici. Infatti l'equazione (3.9) ha le radici distribuite in un numero finito di punti e di intervalli: poichè

$$F_0(\eta_M) + G_0(b) = F_0(\eta_M) - K \leq 0, \quad F_0(\eta_M) + G_0(c) = F_0(\eta_M) > 0,$$

nell'ultima radice è sicuramente  $G_0(\xi)$  strettamente crescente a destra. Precedendo da questa verso sinistra, e considerando le radici isolate o gli estremi destri degli intervalli, si ottiene il valore  $\xi_1$ . E allora

$$y(\xi_1, \eta_M) = F_0(\eta_M) + G_0(\xi_1) + K = K;$$

si ha inoltre  $F_0(\eta) \leq F_0(\eta_M) \forall \eta$ , e

$$(4.5) \quad G_0(\xi) \leq G_0(\xi_1) < 0 \quad \forall \xi \leq \xi_1.$$

Infatti se esistesse  $\xi' < \xi_1$  per cui  $G_0(\xi') > G_0(\xi_1)$ , l'equazione (4.4) ammetterebbe almeno un'altra radice  $\bar{\xi} < \xi' < \xi_1$  in cui  $G_0(\bar{\xi})$  sia crescente a destra in senso stretto, e quindi  $\xi_1$  non sarebbe la radice minima (basta ragionare come prima, sostituendo  $G_0(c)$  con  $G_0(\xi')$ ).

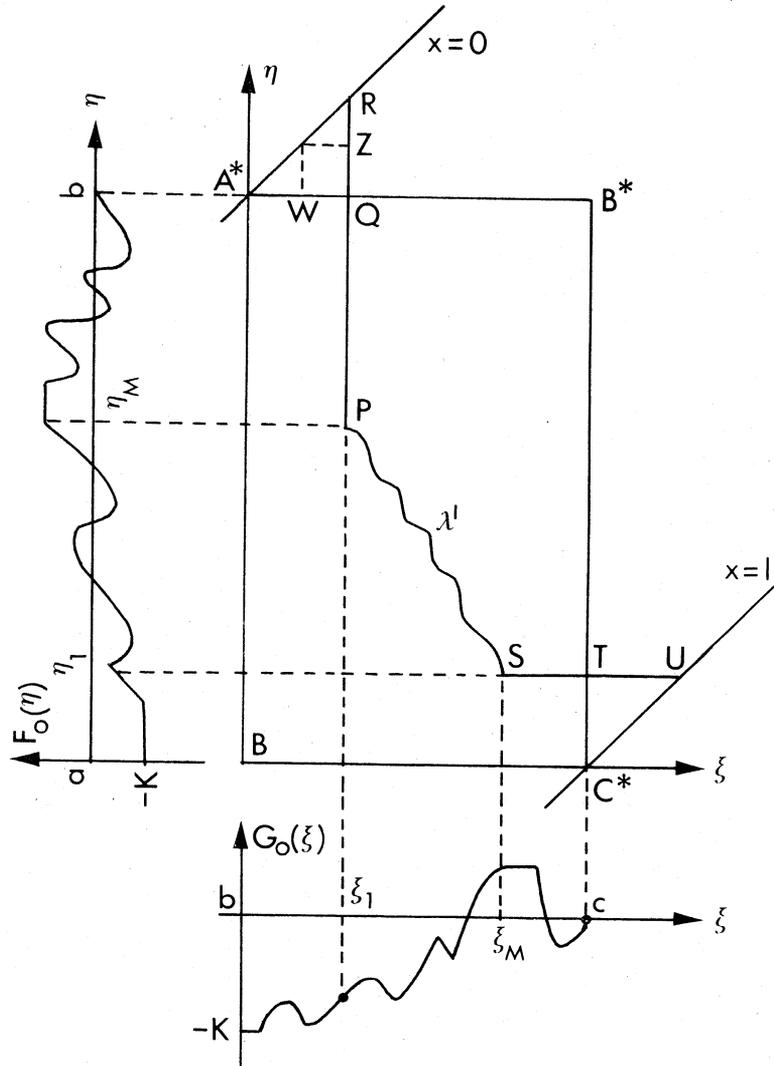


Fig. 8.

Dalla (4.3) segue  $(\forall a \leq \eta \leq b, \forall b \leq \xi \leq \xi_1) \gamma(\xi, \eta) \leq K$ : pertanto la linea di influenza si trova tutta nel semipiano  $\xi \geq \xi_1$  (almeno per quanto concerne il rettangolo  $A^*BC^*B^*$ ). Inoltre  $P(\xi_1, \eta_M) \in \lambda'$  (è un estremo di un arco d'urto): infatti, per la definizione di  $\xi_1$ , risulta  $G_0(\xi) > G_0(\xi_1)$  in un opportuno intorno destro di  $\xi_1$ , e quindi  $\gamma(\xi, \eta_M) > K$ . Mostriamo che *sul segmento PQ* (che per quanto ora detto appartiene alla linea di influenza  $\lambda'$ ) *risulta  $\gamma \geq 0$* .

Infatti lungo PQ è  $\eta \geq \eta_M$ : per la (4.2) è allora  $F_0(\eta) \geq F_0(\eta_M) - K$ ; quindi  $y = F_0(\eta) + G_0(\xi_1) + K \geq 0$ .

Risulta inoltre su  $A^*Q$ , per la (3.10):  $0 \leq y = G_0(\xi) + K < K$ ; pertanto in tutto il triangolo  $A^*QR$  è  $y \leq K$ , è quindi  $QR$  appartiene anch'esso a  $\lambda'$ . Ancora per la (3.10),  $\forall Z \in QR$  è  $y(Z) = y(Q) - y(W) = G_0(\xi_1) - G_0(\xi) \geq 0$ ; dunque su tutto  $PR$  è  $y \geq 0$ .

Analogamente si ragiona per  $G_0$ : se  $G_0(\xi_M) = 0$  il segmento  $ST$  (fig. 8) si riduce ad un punto, senza che ciò alteri il risultato:  $y \geq 0$  su tutto  $SU$ .

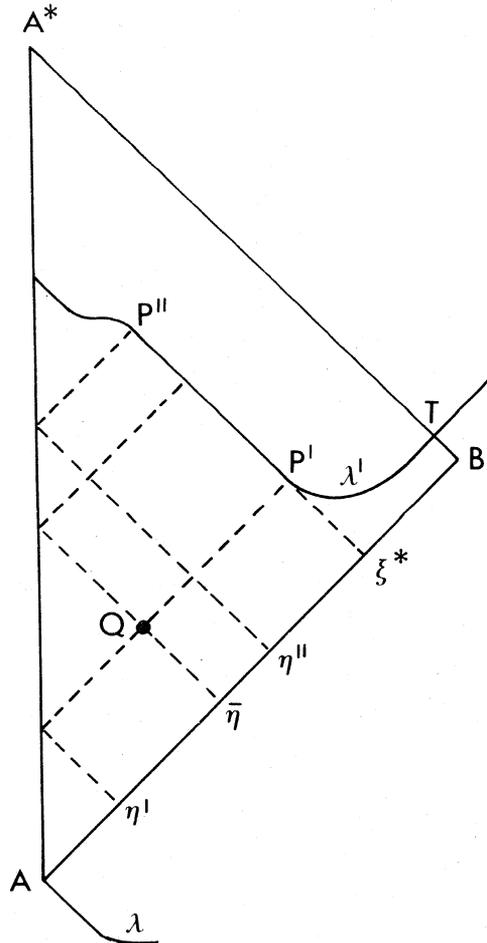


Fig. 9.

Consideriamo ora un tratto di caratteristica  $\xi$  appartenente a  $\lambda'$  e compreso tra P ed S. Esso sarà definito da  $\eta = \eta^*$ ,  $\xi' \leq \xi \leq \xi''$ , e risulterà nell'estremo  $(\xi', \eta^*)$ :  $y = F_0(\eta^*) + G_0(\xi') + K = K$ . In ogni altro punto, essendo  $\xi \geq \xi'$ , è  $G_0(\xi) \geq G_0(\xi') - K$ , per l'analogia della (4.2); in conclusione  $y(\xi, \eta^*) = F_0(\eta^*) + G_0(\xi) + K \geq 0$ . Analogamente si ragiona per i tratti

di caratteristica  $\eta$ . Pertanto *su tutta*  $\lambda'$  risulta  $y \geq 0$ ; come si è visto, ciò implica che  $\lambda'$  sia l'ultima linea di influenza.

*Caso (00-00).* Studiamo la linea di influenza  $\lambda'$  nel triangolo  $ABA^*$ .

Consideriamo un segmento di caratteristica  $\eta$ ,  $\xi = \xi^*$ ,  $\eta' \leq \eta \leq \eta'' \leq \xi^*$ , appartenente a  $\lambda'$ , e mostriamo che *su di esso deve risultare*  $y \geq 0$  (fig. 9). Risulta nell'estremo  $P'(\xi^*, \eta')$ :

$$y(\xi^*, \eta') = F(\xi^*) - F(\eta') = K.$$

Supponiamo per assurdo che esista un  $\bar{\eta}$ ,  $\eta' < \bar{\eta} < \eta''$ , tale che  $y(\xi^*, \bar{\eta}) = F(\xi^*) - F(\bar{\eta}) < 0$ .

Ne segue  $F(\bar{\eta}) > F(\xi^*) = F(\eta') + K$ . Nel punto  $Q(\bar{\eta}, \eta')$  è allora  $y(Q) = F(\bar{\eta}) - F(\eta') > K$ , assurdo perchè  $Q$  appartiene al semicono retrogrado  $Z_{P''}$ , ove  $P'' = (\xi^*, \eta')$ .

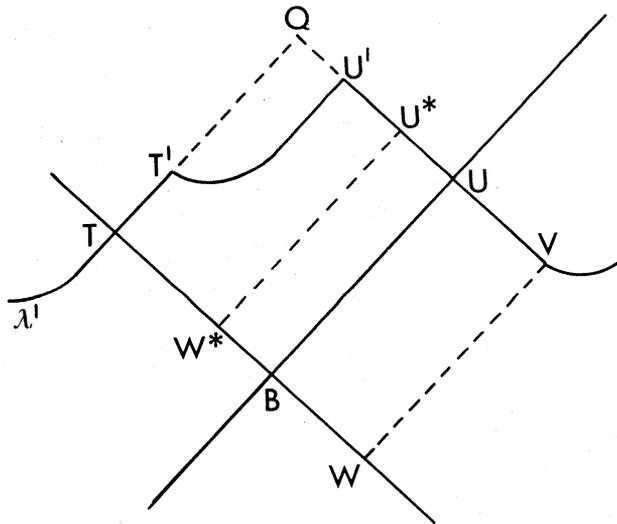


Fig. 10.

È invece possibile che risulti  $y < 0$  in punti appartenenti ad un segmento di caratteristica  $\xi$ :  $\eta = \eta^*$ ,  $\xi' \leq \xi \leq \xi''$ . Sia ad esempio

$$y(\xi, \eta^*) = F(\xi) - F(\eta^*) < 0 \quad \forall \xi : < \xi' < \xi_1 < \xi < \xi_2 < \xi''.$$

Essendo  $F(\xi') - F(\eta^*) = K$ , segue sottraendo:  $F(\xi) - F(\xi') < -K \quad \forall \xi_1 < \xi < \xi_2$ ; ma  $F(\xi') \leq 0$ , e quindi  $F(\xi) < -K \quad \forall \xi_1 < \xi < \xi_2$ . Tutti i punti di  $\lambda'$  in cui è  $y < 0$  sono perciò proiezioni di punti di  $AB$  in cui è  $F < -K$ .

Analoghi risultati valgono per il triangolo  $CBC^*$ . Mostriamo quindi, per terminare l'esame della linea di influenza  $\lambda'$ , che risulta  $y(x, t(x)) \geq 0$  nel rettangolo  $BTQU$  (fig. 10).

Proviamo che la funzione  $F_0(\eta) = y(\xi_B, \eta) = F(b) - F(\eta) = -K - F(\eta)$ ,  $a \leq \eta \leq \eta_T$ , gode delle seguenti proprietà, molto simili a quelle del caso (0-0):

$$(4.5) \quad \begin{aligned} F_0(a) &= -K, & F_0(\eta_T) &\leq K, & -K &\leq F_0(\eta) \leq K \\ \forall \eta' \leq \eta'' : F_0(\eta'') &\geq F_0(\eta') - K. & (*) \end{aligned}$$

Se infatti esistessero  $\eta'$  ed  $\eta''$  ( $\eta' < \eta''$ ) per cui  $F_0(\eta'') < F_0(\eta') - K$ , risulterebbe  $y(\eta'', \eta') = F(\eta'') - F(\eta') = -F_0(\eta'') + F_0(\eta') > K$ , assurdo in quanto  $P(\eta'', \eta')$  appartiene al semicono retrogrado  $Z_T$ . Ma, come nel caso (0-0), la (\*) garantisce che *su ogni segmento di caratteristica  $\eta$  interno a BTQU risulta  $y \geq 0$* . Essendo poi  $y(U) = y(V) + y(B) - y(W) = K - K - y(W) \geq 0$ ,  $y(W^*) \geq y(B)$ , si ha  $y(U^*) \geq y(U) \geq 0$ , e quindi *la disuguaglianza  $y \geq 0$  è verificata anche lungo  $UU'$* .

Analogamente si ragiona per i tratti di caratteristica  $\xi$ .

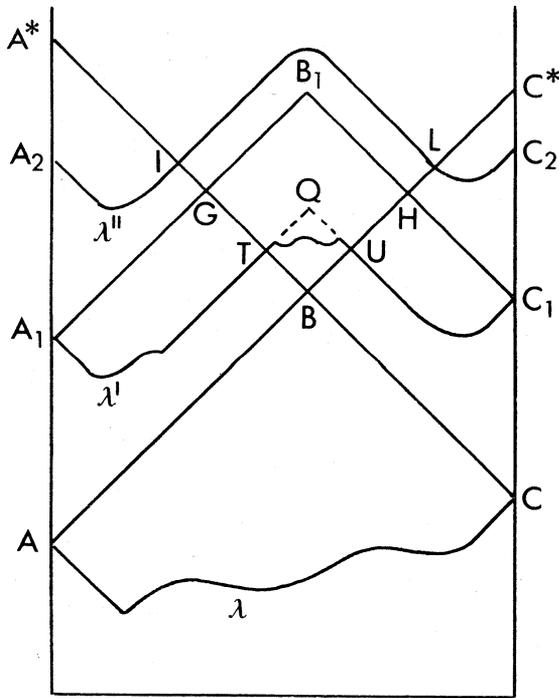


Fig. 11.

Abbiamo quindi dimostrato che *gli unici tratti di  $\lambda'$  su cui può essere  $y < 0$  sono dei segmenti di caratteristica  $\xi$  contenuti nel triangolo  $ABA^*$ , e di caratteristica  $\eta$  contenuti in  $CBC^*$* . Con lo stesso ragionamento del punto 1d) sull'urto anelastico, e valutando la soluzione lungo la spezzata  $A_1 B_1 C_1$  (fig. 11), troviamo che i punti in cui è  $y < -K$  sono contenuti nei segmenti  $A_1 G$  e  $HC_1$ . Ne segue che gli unici tratti di  $\lambda''$  in cui può essere  $y < 0$  sono segmenti di caratteristica  $\xi$  contenuti nel tratto  $A_2 I$  che siano  $\eta$ -proiezioni di punti di  $A_1 G$

nei quali è  $y < -K$ ; analogamente può essere  $y < 0$  su tratti di caratteristica  $\eta$  contenuti in  $LC_2$ . In ogni caso essi risultano ancora contenuti nei triangoli  $ABA^*$  e  $CBC^*$ , e ciò vale anche per le linee successive. Poichè la distanza tra due linee di influenza è non minore di  $\delta$  (Teorema 1), ne segue che il caso  $(^{00-00})$  si verifica al più un numero *finito* di volte.

Si noti però che se  $\lambda$  fosse nel caso  $(^{00-00})$  e  $\lambda'$  nel caso  $(^{0-00})$ , allora  $\lambda''$  sarebbe anch'essa, necessariamente, nel caso  $(^{0-00})$ , che si può ripetere solo un numero *finito* di volte.

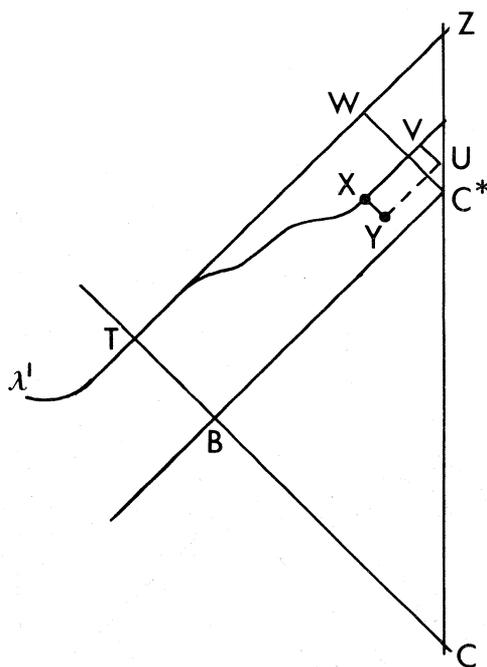


Fig. 12.

*Caso  $(^{0-00})$ .* Supponiamo che nel triangolo  $ABA^*$  si verifichi il caso  $(^{00})$  ed in  $CBC^*$  il caso  $(^0)$ . Dobbiamo discutere solo quanto avviene nel trapezio  $TBC^*Z$  (fig. 12). Nel rettangolo  $TBC^*W$  il ragionamento è identico a quello svolto nel caso  $(^{00-00})$  per il rettangolo  $BTQU$ ; nel triangolo  $C^*WZ$  basta poi osservare che: (1) non possono esistere archi d'urto, a causa della (4.5); (2) è  $y(V) = y(U) + y(X) - y(Y) = 0 + K - y(Y) \geq 0$ .

*Su tutta la parte di  $\lambda'$  contenuta in  $TBC^*Z$  è pertanto  $y \geq 0$ .* Gli unici tratti di  $\lambda'$  in cui può essere  $y < 0$  sono perciò *segmenti di caratteristica  $\xi$  contenuti nel triangolo  $ABA^*$*  ed in tale triangolo restano anche per le linee di influenza successive, come nel caso  $(^{00-00})$ . Anche il caso  $(^{0-00})$  non può quindi verificarsi che un numero *finito* di volte: ne segue che deve esistere una linea  $\lambda^*$  in cui si verifichi il caso  $(^{0-0})$ , e ciò, come abbiamo mostrato, implica che il numero degli urti sia *finito*.

Il teorema è pertanto completamente dimostrato.