Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Emma Previato

Una caratterizzazione dei sottogruppi di Dedekind di un gruppo finito

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.6, p. 643–650.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_6_643_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Teoria dei gruppi. — *Una caratterizzazione dei sottogruppi di Dedekind di un gruppo finito* (*). Nota di EMMA PREVIATO, presentata (**) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — A necessary and sufficient condition is given for a subgroup of a finite group to be a Dedekind subgroup.

Un sottogruppo H di un gruppo G si dice sottogruppo di Dedekind (in G) se e solo se, dato comunque un sottogruppo K di G, la mappa φ_K di $[H \cup K/H]$ in $[K/H \cap K]$ (1) data da $X \mapsto X \cap K$ è un isomorfismo reticolare o, in modo equivalente, se e solo se, dati comunque $M, N \leq G$, da $M \leq N$ segue $M \cup (H \cap N) = (M \cup H) \cap N$ e da $H \leq N$ segue $H \cup (M \cap N) = (H \cup M) \cap N$ (cfr. [5], p. 72). Scriveremo $H \leq_d G$ per indicare che H è sottogruppo di Dedekind del gruppo G; per il resto seguiamo la notazione usata in [5].

Scopo della presente Nota è la dimostrazione del seguente:

TEOREMA. *Sia* G *un gruppo finito e* H *un sottogruppo di* G; *allora sono equivalenti le seguenti condizioni*:

i) $H \leq_d G$

ii) $H \leq_d \langle H, x\rangle$ *per ogni* $x \in G$ *di ordine potenza di primo.*

In tutto il seguito gruppo significherà gruppo finito.

1. Per comodità del lettore, enunciamo anzitutto due risultati dovuti a R. Schmidt.

1.1 ([3]). Sia $H \leq_d G$ e sia $H_G = \{1\}$ (con H_G si denota il sottogruppo $\bigcap_{g \in G} H^g$). Allora $G = P_1 \times \cdots \times P_r \times K$, dove P_i è un P–gruppo (2) di ordine $p_i^{n_i} q_i$, $(|P_i|, |P_j|) = (|P_i|, |K|) = 1$ $(i, j = 1, \cdots, r; i \neq j)$, e dove $H = Q_1 \times \cdots \times Q_r \times (H \cap K)$, con Q_i q_i–Sylowgruppo di P_i ed $H \cap K$ quasinormale in G.

1.2 ([3], Theorem 5). Se $H \leq_d G$ e se Q/H_G è un sottogruppo di Sylow di H/H_G, allora $Q \leq_d G$.

Per semplicità, diremo che un sottogruppo H di un gruppo G ha la proprietà (*) se e solo se $H \leq_d \langle H, x\rangle$ per tutti gli x di G tali che l'ordine $|x|$ di x è potenza di primo.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1975.

(1) Con la scrittura [M/N], ove $N \leq M \leq G$, indichiamo l'intervallo (chiuso) del reticolo $\mathscr{L}(G)$ dei sottogruppi di G che ha come estremi N ed M.

(2) Per la definizione di P–gruppo cfr. [4], p. 11.

1.3 PROPOSIZIONE. *Se g è un elemento di ordine primo q del Gruppo* G *e se* $\langle g\rangle$ *ha la proprietà* (*), *allora* $\langle g\rangle \leq_d G$.

Dimostrazione. Supponiamo che per $h \in G$ di ordine potenza di primo $\langle g\rangle$ non sia permutabile con $\langle h\rangle$; allora $\langle g, h\rangle$ non può essere un q–gruppo perché $\langle g\rangle \leq_d \langle g, h\rangle$ e un sottogruppo di Dedekind di un gruppo primario è quasinormale ([1], Lemma 1). Pertanto (1.1) $\langle g, h\rangle$ deve essere un P–gruppo di ordine pq, $p > q$, e $\langle h\rangle$ un coniugato di $\langle g\rangle$. In conclusione

(1) $\langle g\rangle$ è permutabile con ogni sottogruppo $\langle h\rangle$ di G di ordine potenza di primo purché $\langle h\rangle$ non sia un coniugato di $\langle g\rangle$.

Possiamo concludere che $\langle g\rangle \leq_q G$ (e dunque anche $\langle g\rangle \leq_d G$) se e solo se la chiusura normale L di $\langle g\rangle$ in G è un q–gruppo; ci occuperemo pertanto del caso che L non sia un q–gruppo. Proviamo che ogni sottogruppo di G, che sia generato da un insieme $\{g_1, \cdots, g_t\}$ di elementi di ordine q tali che $\langle g_i\rangle$ goda della proprietà (*), è un P–gruppo. Supponiamo che non sia un q–gruppo abeliano; è possibile allora trovare due sottogruppi $\langle g_i\rangle$ e $\langle g_j\rangle$ che non siano permutabili; risulta $\langle g_i, g_j\rangle = \langle g_j\rangle S$ ove $|S| = p$, $p > q$. Vediamo che $\langle g_i, g_k\rangle$ (per $k \neq i, j$) non può essere un q–gruppo. Infatti, poiché $S \lhd \langle S, g_k\rangle$ (3), risulta $\langle g_i, g_j, g_k\rangle = S\langle g_i, g_k\rangle$; allora se $\langle g_i, g_k\rangle$ fosse un q–gruppo anche $\langle g_j, g_k\rangle$ dovrebbe risultare tale, e di conseguenza $\langle g_i, g_j, g_k\rangle = \langle g_k\rangle \times \langle g_i, g_j\rangle$. Ma per la (*) $\langle g_i\rangle \leq_d \langle g_i, g_j g_k\rangle = \langle g_i, g_i^{g_j g_k}, g_j g_k\rangle = \langle g_i, g_j, g_k\rangle = \langle g_k\rangle \times \langle g_j\rangle S$, il che è in contraddizione con 1.1. Siamo ora in grado di concludere, per induzione sul numero dei g_i, che $\langle g_1, g_2, \cdots, g_t\rangle$ è un P–gruppo; infatti posto $\langle g_1, g_2\rangle = \langle g_1\rangle S_1$, $|S_1| = p > q$, $\langle g_1, g_t\rangle = \langle g_1\rangle S_2$, $|S_2| = r > q$, tanto S_1 quanto S_2 sono normalizzati da $\langle g_1, g_2, g_t\rangle$ e $\langle g_1, g_2, g_t\rangle = \langle g_1\rangle S_1 S_2$; se $r \neq p$, allora $\langle g_2\rangle$ e $\langle g_t\rangle$ sono coniugati secondo un elemento di S_1 o di S_2 in $\langle g_2, g_t\rangle$; nel primo caso si ha $\langle g_1, g_2, \cdots, g_t\rangle = \langle g_1, g_2, \cdots, g_{t-1}\rangle$, nel secondo $\langle g_1, g_2, \cdots, g_t\rangle = \langle g_1, g_3, \cdots, g_t\rangle$ e si conclude per l'ipotesi induttiva. Se invece $p = r$, allora $\langle g_1, g_2, \cdots, g_t\rangle = \langle g_1, \cdots, g_{t-1}\rangle S_2$ è un P–gruppo, perché $\langle g_1, \cdots, g_{t-1}\rangle$ è un P–gruppo e ogni sottogruppo d'ordine p è normale in $\langle g_1, \cdots, g_t\rangle$. Provato così che

(2) L è un P–gruppo non abeliano, supponiamo per assurdo che $\langle g\rangle$ non sia di Dedekind in G, che scegliamo quale contro–esempio d'ordine minimo. $\langle g\rangle$ apparterrà allora a un sottoreticolo pentagonale di $\mathscr{L}(G)$, i cui elementi sono rispettivamente i gruppi $\langle g\rangle$, $\langle g\rangle \cup K$, H, K, $\langle g\rangle \cap K = \{1\}$, con $K \lneqq H$, oppure $\langle g\rangle$, H, $\langle g\rangle \cup K$, K, $\langle g\rangle \cap K = \{1\}$, con $\langle g\rangle \lneqq H$. Risulta, in entrambi i casi, $\langle g\rangle \cup K = G$, per la minimalità di G. Inoltre poiché $\langle g\rangle K \neq K\langle g\rangle$ (il reticolo essendo pentagonale), K contiene almeno un coniugato $\langle g\rangle^y$ di $\langle g\rangle$ (cfr. (1)); il P–gruppo $L \cap K$ è allora del tipo $\langle g\rangle^y T \lhd K$, con $T \lhd G$. Per la minimalità di G, potremo affermare che $T = \{1\}$, non appena si provi che $\langle g\rangle T$ appartiene a un sottoreticolo pentagonale di [G/T]; nel primo caso, ciò è ovvio per $\langle g\rangle T$, G, H, K, T; nel secondo caso, basterà

(3) La scrittura $T \lhd G$ significa che T è sottogruppo normale del gruppo G.

far vedere che $T\langle g\rangle \lneqq TH \lneqq G = \langle g\rangle \cup K$. Supponiamo, dapprima, $TH = G$; $KH = G$, $|KH| = \frac{|K|\,|H|}{|K\cap H|}$, ma $|H \cap K| = 1$ dunque $|K| = |T|$, falso perché ne seguirebbe $\langle g\rangle K = K\langle g\rangle$, per (1). Dunque, risulta $TH \lneqq G$; supponiamo ora $T\langle g\rangle = TH$; essendo $\langle g\rangle \leq_d TH$ (per la minimalità di G), è $H = H \cap T\langle g\rangle = \langle g\rangle \cup (T \cap H) = \langle g\rangle$, assurdo. Pertanto, risulta $T = \{1\}$ e $\langle g\rangle^y \lhd K$; non potendo essere $K = \langle w \in K \mid w \notin \langle g\rangle^y, |w|$ potenza di primo$\rangle$, in quanto ciò comporterebbe $\langle g\rangle K = K\langle g\rangle$ per (1), dovrà essere $K = M \times \langle g\rangle^y$ con $(|M|, q) = 1$. Allora $\langle g\rangle$ risulta normale in $M \cup \langle g\rangle = M\langle g\rangle \neq G$: infatti, posto $R\langle g\rangle = M\langle g\rangle \cap L$, risulta $R\langle g\rangle = M\langle g\rangle \cap R\langle g\rangle = \langle g\rangle \cup (M \cap R\langle g\rangle) = \langle g\rangle \lhd M\langle g\rangle$. Ne consegue che M normalizza $\langle g\rangle \cup \langle g\rangle^y$, quindi si può scrivere $\langle g\rangle \cup K = M(\langle g\rangle^y \cup \langle g\rangle)$, e così K è massimale in G (di indice primo p). Questo fatto fornisce, nel primo caso, la contraddizione cercata, poiché si era supposto $K \lneqq H \lneqq G$. Nel secondo caso osserviamo invece che, da $|G : K| = p$ e da $L \cap K = \langle g\rangle^y$, segue che $|L| = pq$; allora, essendo $\langle g\rangle^y \nleq H$, sarà $L \cap H = \langle g\rangle \lhd H$. Risulta quindi $\langle g\rangle \lhd H \cup M \neq G$, ma $H \cup M$ deve avere indice p, ed essendo $|HM| = |H|\,|M|$ e $|H \cup M| = q\,|M|$, si conclude $|H| = q$, assurdo.

1.4. PROPOSIZIONE. *Sia* Q *un* q*-sottogruppo del gruppo* G, *con proprietà* (*). *Allora* $Q \leq_d G$.

Dimostrazione. Sia G un controesempio di ordine minimo, e sia Q un q-sottogruppo di G con la proprietà (*) tale che $Q \nleq_d G$. Risulta evidentemente

$$Q_G = \{1\}. \tag{1}$$

Si avrà $Q \nleq_q \langle Q, x\rangle$ per un opportuno x di G, di ordine potenza di primo, altrimenti sarebbe $Q \leq_q G$. Allora, posto $Q_{\langle Q,x\rangle} = N$, risulta $\langle Q, x\rangle/N$ un gruppo di ordine pq, $p > q$ (1.1), e non è restrittivo assumere $|x| = p$. Sarà $N \neq \{1\}$ (altrimenti $Q \leq_d G$ per 1.3), e dunque $|Q| = q^\alpha$ con $\alpha \geq 2$; scegliamo un elemento y di G, di ordine potenza di primo, che non normalizza N. Poiché allora $q^2 \mid |\langle Q, x, y\rangle / Q_{\langle Q,x,y\rangle}|$ e d'altra parte $Q \nleq_q \langle Q, x, y\rangle$, per 1.1 Q non può essere di Dedekind in $\langle Q, x, y\rangle$ e, per l'ipotesi di minimalità, si ha

$$\langle Q, x, y\rangle = G. \tag{2}$$

Escludiamo anzitutto il caso $Q \nleq_q \langle Q, y\rangle$. In tal caso, infatti, possiamo scegliere y in modo che sia $\langle Q, y\rangle = Q\langle y\rangle$; risulta $|y| = r > q$, $|Q : M| = q$ se $M = Q_{\langle Q,y\rangle}$ e $\langle Q, y\rangle/M$ un P-gruppo (1.1). Osserviamo che $G = \langle y\rangle(Q\langle x\rangle)$; infatti $Q\langle x\rangle$ è generato da coniugati di Q, i quali permutano con $\langle y\rangle$, avendo la proprietà (*). Vediamo ora che $M \cap N \lhd G$: anzitutto $M \cap N \lhd Q$. Ora, se né x né y normalizzassero $M \cap N$, sarebbe $(M \cap N)^G = ((M \cap N)^{Q\langle x\rangle})^{\langle y\rangle} = N^{\langle y\rangle} \leq Q\langle y\rangle$, mentre $(M \cap N)^G = ((M \cap N)^{\langle y\rangle})^{Q\langle x\rangle} = M^{\langle x\rangle}$; ma allora $Q\langle x\rangle = QM^{\langle x\rangle} = QN^{\langle y\rangle} \leq Q\langle y\rangle$, dunque $Q\langle x\rangle = Q\langle y\rangle$, assurdo;

se invece x normalizza $M \cap N$ e y non lo normalizza, allora $((M \cap N)^{Q\langle x\rangle})^{\langle y\rangle} = (M \cap N)^{\langle y\rangle} = M = ((M \cap N)^{\langle y\rangle})^{Q\langle x\rangle} = M^{\langle x\rangle}$, che contiene un elemento di ordine p, assurdo, come pure se y normalizza $M \cap N$ e x no. Risulta pertanto $M \cap N = \{1\}$, Q abeliano elementare di ordine q^2, $\langle x\rangle \lhd \langle Q, x\rangle$ e $\langle y\rangle \lhd \langle Q, y\rangle$. Proviamo inoltre che $\langle x\rangle \lhd G$ e $\langle y\rangle \lhd G$; infatti $\langle x\rangle$ è normale in $\langle x, Q^y\rangle$ oppure in $\langle x, Q^{y^2}\rangle$, altrimenti $Q^y \cup Q^{y^2} = Q\langle y\rangle$ sarebbe normalizzato da x, e questo è assurdo. Allora $\langle y\rangle$, che è generato dal prodotto di un elemento di Q per uno di Q^y (oppure di Q^{y^2}), normalizza $\langle x\rangle$, e dunque $\langle x\rangle \lhd \langle y, Q, x\rangle$; analogamente si vede che $\langle x\rangle$ normalizza $\langle y\rangle$ così $\langle y\rangle \lhd G$. In particolare è $\langle x, y\rangle = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$, dunque se $|x| = |y| = p$ risulta $|xy| = p$, $Q \leq_d \langle Q, xy\rangle = \langle Q, N^y, M^x\rangle = G$, assurdo. Se $|x| \neq |y|$ allora vi sono due soli sottogruppi diversi da G che contengono propriamente Q; essendo, come sopra, $Q \cup Q^{xy} = G$, allora $Q\langle x\rangle$ contiene al più un sottogruppo minimo di Q^{xy}, come pure $Q\langle y\rangle$; dunque un elemento z di Q^{xy} che non stia né in $Q\langle x\rangle$ né in $Q\langle y\rangle$ è tale che $\langle Q, z\rangle = G$ e dunque $Q \leq_d G$, contro l'ipotesi. Dovrà essere pertanto

$$Q \leq_q \langle Q, y\rangle . \tag{3}$$

Se $|y| = r^n$ ed $r \neq q$, allora $Q \lhd \langle Q, y\rangle$; poiché $N \ntriangleleft \langle Q, y\rangle$, risulta $N^{\langle y\rangle} = Q$, $(N^{\langle y\rangle})^{Q\langle x\rangle} \ni x$, mentre $(N^{Q\langle x\rangle})^{\langle y\rangle} = N^{\langle y\rangle} = Q$, assurdo. Quindi dovrà essere $|y| = q^n$, $Q\langle y\rangle$ un q-gruppo. Poiché un coniugato Q^{x^α} di Q gode della proprietà $(*)$ e non è di Dedekind in $G = \langle Q^{x^\alpha}, x, y\rangle$, per (3) risulta $Q^{x^\alpha} \leq_q \langle Q^{x^\alpha}, y\rangle$ e dunque sarà $G = \langle y\rangle (Q\langle x\rangle)$, da cui

$$|G| = pq^m. \tag{4}$$

Escludiamo ora la possibilità $\langle x\rangle \lhd G$; a tale scopo ragionando per assurdo distinguiamo due casi. *I caso:* $\langle y\rangle \ntriangleleft \langle x, y\rangle$. Sarà $|yx|$ una potenza di q. Osserviamo che Q e yx non possono stare nello stesso q–Sylowgruppo di G; infatti Q è contenuto in uno ed un solo q–Sylowgruppo S; dunque si avrebbe $\langle y, yx\rangle \leq Q\langle y\rangle = S$, impossibile; pertanto $\langle Q, yx\rangle \ni x$ e dunque $Q \leq_d \langle Q, yx\rangle = G$, assurdo. *II caso:* $\langle x, y\rangle = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$. Sia $Q = \langle a\rangle N$; poiché a non centralizza x, risulta $|ax|$ una potenza di q. Per β opportuno, $y^{x^\beta} = y$ sta nello stesso q–Sylowgruppo che contiene ax, dunque $|axy|$ è una potenza di q e $Q \leq_d \langle Q, axy\rangle = \langle Q, xy\rangle = G$, assurdo. Abbiamo quindi provato

$$\langle x\rangle \ntriangleleft G. \tag{5}$$

Consideriamo un q–sottogruppo L normale in G e tale che $\langle x, L\rangle$ sia normale in G (un tale L esiste essendo G, per la (4), risolubile). Risulta $QL/L \leq_d G/L$ per la minimalità e dunque QL ha un sottogruppo T di indice q che è normale in G, con $L \leq T$ (1.1). Risulta $T \cap Q = N$ (si tenga presente che la chiusura normale di $T \cap Q$ in G è un q–gruppo) e $\langle x, T\rangle = \langle x, L\rangle \cup T$ è normale in G. Consideriamo, in $\overline{G} = G/T$ [4], il sottogruppo $\langle \overline{y}\rangle$; esso è nor-

(4) Indichiamo con $\overline{X}$ l'immagine di un sottoinsieme X di G nell'omomorfismo canonico $\pi : G \to G/T$.

male in un q–Sylowgruppo di $\bar{G}$ (ha ivi indice $\leq q$). Possono darsi due casi. *I caso*: $\langle\bar{y}\rangle \lhd \langle\bar{x}\rangle\langle\bar{y}\rangle$. Risulta allora $\langle\bar{y}\rangle \lhd \bar{G}$, e dunque y sta in ogni q–Sylowgruppo di G. Scelto in Q^x un b tale che $Q^x = N\langle b\rangle$, risulta allora by un q–elemento e dunque $Q \leq_d \langle Q, by\rangle$. Poiché $\langle Q, by\rangle$ non è un q–gruppo e quindi $Q \nleq_q \langle Q, by\rangle$, sarà $\langle Q, by\rangle = Q\langle x_1\rangle$, con $|x_1| = p$, $Q \cap Q^{by} \lhd \langle Q, by\rangle$ (1.1); essendo $N^G = (T \cap Q)^G$ un q–gruppo, risulta $Q \cap Q^{by} = N$. In conclusione, by normalizza N, quindi $N^{by} = N^y = N$, assurdo. *II caso*: $\langle y\rangle T/T \ntriangleleft \langle x\rangle\langle y\rangle T/T$; di conseguenza xy è un q–elemento e in $\langle Q, xy\rangle = Q\langle x_2\rangle$, con $|x_2| = p$, possiamo ragionare come sopra, ottenendo $N = Q \cap Q^{xy}$, e dunque $N^{xy} = N^y = N$; quest'ultima contraddizione permette di concludere che $Q \leq_d G$.

2. Alla dimostrazione del teorema premettiamo tre lemmi.

2.1. LEMMA. *Sia* $H \leq_q G$ *e* H *nilpotente*; *se* Q *è un* q*–Sylowgruppo di* H, *allora* $Q \leq_q G$.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, $Q \nleq_q G$; allora Q è un q–Sylowgruppo di G ([3], Lemma 4); ma se $Q^g \neq Q$ per $g \in G$, è $|HQ^g| = |H|\, q^{\alpha}$ e $\alpha \geq 1$, assurdo.

2.2. LEMMA. *Sia* $H \leq_d G$ *e* H *nilpotente*; se $(|G : H|, |H|) = 1$, *allora ogni sottogruppo di Sylow di* H *è di Dedekind in* G.

Dimostrazione. Sia G un controesempio di ordine minimo, sia H come nell'enunciato e sia Q un q–Sylowgruppo di H che non è di Dedekind in G. In virtù della Proposizione 1.4, possiamo supporre $G = H\langle x\rangle$, $|x| = p^n$, $p \nmid |H|$. Poiché d'altra parte $H \nleq_q G$ (2.1), è $|x| = p$, $|H : N| = q$ ove $N = H_G$ e, per la minimalità di G, $|N| = r^m$ con r primo e quindi $|Q| = q$. Distinguiamo due casi. *I caso*: N non è un sottogruppo normale minimo di G. Sia $\{1\} \neq M \lhd G$ e $M \lneqq N$; poiché $|G/M| < |G|$ e $|Q\langle x\rangle M| < |G|$, si vede che Q normalizza $\langle x\rangle$ e qualunque altro sottogruppo d'ordine p. 1.4 permette allora di affermare $Q \leq_d G$; infatti essendo $G = H\langle x\rangle$ i coniugati di Q stanno in $Q\langle x\rangle$, quindi $Q \leq_d \langle Q, h\rangle$, qualunque sia h di ordine potenza di primo. *II caso*: N è normale minimo in G. I coniugati di Q non possono generare un gruppo di ordine $r^{\beta}q$, che sarebbe nilpotente; pertanto Q^G contiene un elemento x_1 di ordine p; ma allora x_1 centralizza N e dunque $|N| = r$. Essendo $\langle N, x_1\rangle \lhd G$ e abeliano, si ha $\langle x_1\rangle = \langle x\rangle \lhd G$, quindi $Q \leq_d G$ per 1.4, come nel I caso.

OSSERVAZIONE. L'ipotesi $(|G : H|, |H|) = 1$ in 2.2 è essenziale; esempi di sottogruppi di Dedekind nilpotenti i cui Sylowgruppi non sono di Dedenkid si trovano in [3], section 3.

2.3. LEMMA. *Sia* H *un sottogruppo del gruppo* G *che gode della proprietà* (*); *allora* $H_G = \bigcap \{H_L \mid L = \langle H, x\rangle$ *con* $|x|$ *potenza di primo*$\}$.

Dimostrazione. Si ha evidentemente $\bigcap_L H_L \geq H_G$, quindi basterà far vedere che $\bigcap_L H_L \leq H^g$ per ogni $g \in G$; a tale scopo è poi sufficiente provare che, posto $\langle g\rangle = \langle x_1\rangle \times \cdots \times \langle x_r\rangle$, $|x_i|$ potenza di primo, è $H_{\langle H,g\rangle} = \bigcap_{i=1}^{r} H_{\langle H,x_i\rangle}$; useremo induzione sul numero r degli x_i. Poniamo $H_1 = H_{\langle H,x_1\cdots x_{r-1}\rangle} = \bigcap_{i=1}^{r-1} H_{\langle H,x_i\rangle}$, $H_2 = H_{\langle H,x_r\rangle}$ e $K = H_1 \cap H_2$; essendo $H_{\langle H,g\rangle} \leq K$ e $K \lhd H$, per concludere basterà far vedere che $K^{\langle x_r\rangle} = K$ e $K^{\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle} = K$. Osserviamo anzitutto che, essendo $\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle$ permutabile con $\langle x_r\rangle$, risulta

$$(1) \qquad (K^{\langle x_r\rangle})^{\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle} = (K^{\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle})^{\langle x_r\rangle} \leq \langle H\,,x_1\cdots x_{r-1}\rangle \cap \langle H\,,x_r\rangle .$$

I caso: supponiamo che H commuti con ogni $\langle x_i\rangle$. In tal caso il gruppo $K^{\langle x_r\rangle\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle}$ è normalizzato da H, avendosi $(K^{\langle x_r\rangle\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle})^H = (K^H)^{\langle x_r\rangle\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle}$ e $K^H = K$. Facciamo ora vedere che $K = K^{\langle x_r\rangle}$. Da $K \lneqq K^{\langle x_r\rangle}$, infatti, essendo $K^{\langle x_r\rangle} \leq H_2$, seguirebbe $K^{\langle x_r\rangle} \nleq H_1$ e dunque $H_1 \lneqq H_1 \cup K^{\langle x_r\rangle\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle}$; pertanto, poiché quest'ultimo gruppo è normale in $\langle H\,,x_1\cdots x_{r-1}\rangle$, esso non può essere contenuto in H. Ma allora H è contenuto propriamente in $H \cup K^{\langle x_r\rangle\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle} \leq H\langle x_r\rangle \cap H\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle$ (per la (1)), e questo è assurdo perché $(|H\langle x_r\rangle : H|\,,|H\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle : H|) = 1$. In maniera del tutto analoga si conclude che $K^{\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle} = K$.

II caso: H non permuta con tutti gli $\langle x_i\rangle$. Non sarà restrittivo assumere $H\langle x_r\rangle \neq \langle x_r\rangle H$. Osserviamo che $\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle$ normalizza K; infatti da $K \lneqq K^{\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle}$ seguirebbe $K^{\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle} = H_1$, essendo $|H_1 : K| = |H : H_2|$ un numero primo (1.1). Allora sarebbe $\langle H\,,x_r\rangle = H^{\langle x_r\rangle} = H_1^{\langle x_r\rangle} \cup H = K^{\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle\langle x_r\rangle} \cup H \leq \langle H\,,x_1\cdots x_{r-1}\rangle$ (per (1)), dunque $H_1 \leq H_2$ e $K = H_1 \lhd \langle H\,,x_1\cdots x_{r-1}\rangle$, assurdo. Pertanto risulta

$$(2) \qquad (K^{\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle})^{\langle x_r\rangle} = K^{\langle x_r\rangle} = (K^{\langle x_r\rangle})^{\langle x_1\cdots x_{r-1}\rangle}.$$

Ora $K^{\langle x_r\rangle} \lhd H_2$, infatti $(K^{\langle x_r\rangle})^{H_2} = (K^{H_2})^{\langle x_r\rangle} = K^{\langle x_r\rangle}$; allora da $H/H_1 = H_1 \cup H_2/H_1 \cong H_2/H_1 \cap H_2 = H_2/K$ segue $K^{\langle x_r\rangle} \cup H_1 \lhd H$, quindi $K^{\langle x_r\rangle} \cup H_1 \lhd \langle H\,,x_1\cdots x_{r-1}\rangle$ (cfr. (2)); ma essendo $H_1 \leq K^{\langle x_r\rangle} \cup H_1 \leq H$, deve risultare $H_1 = K^{\langle x_r\rangle} \cup H_1$; si conclude che $K^{\langle x_r\rangle} \leq H_1$ e così $K^{\langle x_r\rangle} = K$.

Dimostrazione del *Teorema*. Evidentemente *i*) implica *ii*); proviamo che da *ii*) segue *i*).

Sia G un controesempio di ordine minimo relativo ad $H \leq G$. Risulta pertanto, in virtù di 2.3, $\bigcap \{H_L \mid L = \langle H\,,x\rangle\,,|x| \text{ potenza di primo}\} = H_G = \{1\}$ e dunque H è nilpotente ([2], Satz 2). Per dimostrare $H \leq_d G$ è sufficiente provare che ogni sottogruppo di Sylow di H gode della proprietà (*) (1.4). Supponiamo, per assurdo, che risulti per un q–Sylowgruppo Q di H e per un x di G di ordine potenza di primo $Q \nleq_d \langle Q\,,x\rangle$. Osserviamo anzitutto che non è restrittivo assumere $\langle H\,,x\rangle = H\langle x\rangle$; infatti risulta $\langle H\,,x\rangle/H_1$ un P–gruppo di ordine pq ove $p > q$ e $H_1 = H_{\langle H,x\rangle}$ (1.1 e 2.1); allora $\langle H\,,x\rangle = H\langle y\rangle$ con $|y| = p^n$. Se ora H non permuta con $\langle x\rangle$, allora $\langle x\,,H_1\rangle/H_1$ è un q–gruppo coniugato a QH_1/H_1 e dunque $x = z^{y^\alpha}u$, per $z \in Q$, $u \in H_1$. Ora, essendo H nilpotente, il q'–sottogruppo di Hall di H è normale in $\langle H\,,x\rangle$ e dunque un suo elemento centralizza tanto Q quanto Q^t per $t \in \langle H, x\rangle$; se dunque scriviamo $u = u_1 u_2$ con $[u_1, u_2] = 1$, $u_1 \in Q$, $(|u_2|, q) = 1$, otteniamo $x = (z^{y^\alpha} u_1) u_2$, ove $[z^{y^\alpha} u_1, u_2] = 1$ quindi, essendo $(|u_2|, |x|) = 1$, si ha $u_2 \in \langle z^{y^\alpha} u_1\rangle$ (5), e infine $\langle Q, x\rangle \leq \langle Q, Q^{y^\alpha}\rangle \leq \langle Q, y\rangle$ pertanto $Q \nleq_d \langle Q, y\rangle$. Assumiamo dunque $Q \nleq_d \langle Q, x\rangle$ e $\langle H, x\rangle = H\langle x\rangle$. Osserviamo anzitutto che è possibile trovare un $N \leq H$ tale che $N \lhd \langle H, x\rangle$ e tale che $QN \leq_d \langle QN, x\rangle$ ($N = H_{\langle H,x\rangle}$ gode di tali proprietà, cfr. 1.2). Proviamo ora che p è un divisore di $|N|$; infatti per 2.2 risulta $(|\langle QN, x\rangle : QN|, |QN|) > 1$, ma l'indice di QN in $\langle QN, x\rangle$ è p; per convincersi di ciò si pensi che $M = QN_{\langle QN,x\rangle}$ è un sottogruppo di indice q in QN e di indice p^β in $M\langle x\rangle$; d'altra parte $QN/M \leq_d \langle QN, x\rangle/M$. Scegliamo ora un sottogruppo N con le proprietà dette e tale che la p–parte di $|N|$ sia minima. Sia y un elemento di G che non normalizza il p–Sylowgruppo di N; non è restrittivo assumere anche y di ordine potenza di primo, $|y| = r^m$, e $\langle H, y\rangle = H\langle y\rangle$. Posto $H_{\langle H,x,y\rangle} = N_1$, osserviamo che risulta $|N_1|_p < |N|_p$; proveremo che $QN_1 \leq_d \langle H, x, y\rangle$, ma questa conclusione contraddice la minimalità di $|N|_p$; ne segue l'assurdo. Non è restrittivo pertanto assumere $H_{\langle H,x,y\rangle} = \{1\}$.

Abbiamo già osservato che, risultando $\langle H, x\rangle/H_1$ un P–gruppo d'ordine pq, tutta la q'–parte di H è normale in $\langle H, x\rangle$. Poniamo $H_{\langle H,y\rangle} = H_2$, ed esaminiamo separatamente due casi (1.1). *I caso:* $\langle H, y\rangle/H_2 = P$ sia un P–gruppo non abeliano. Poiché $H_{\langle H,x,y\rangle} = \{1\}$, H_2 non può contenere un sottogruppo di Sylow di H relativo a un primo diverso da q, dunque $|P| = pr$, $|H| = p^s q^t$, $s > 0$, $t > 0$, $Q \lhd H\langle y\rangle$, $|y| = r > p > q$. Osserviamo che, essendo $(|H^x|, r) = 1$, risulta $H^x\langle y\rangle = \langle y\rangle H^x$ (1.1), e dunque $\langle y\rangle(H\langle x\rangle) = (H\langle x\rangle)\langle y\rangle$. Consideriamo ora $Q_1 = Q \cap H_1$; y normalizza Q_1, altrimenti risulterebbe $(Q_1^{H\langle x\rangle})^{\langle y\rangle} = Q_1^{\langle y\rangle} = Q = (Q_1^{\langle y\rangle})^{H\langle x\rangle} = Q^{\langle x\rangle}$ che contiene almeno un elemento di ordine p, assurdo. Pertanto è $Q_1 = \{1\}$ e $|Q| = q$. D'altra parte, i coniugati di Q secondo $\langle x\rangle$ generano un elemento x_1 tale che $\langle x_1, H\rangle = \langle x\rangle H$, quindi x_1 centralizza il p–sottogruppo di Sylow di H, e dunque il p–Sylowgruppo di H_2 risulta normale in $\langle H, x\rangle$. Così $|H| = pq$, dunque $|H\langle x\rangle\langle y\rangle| = qp^2 r$; di conseguenza è $\langle y\rangle \lhd \langle H, y\rangle$, e così posto $H = Q \times \langle a\rangle$ è $|ay| = p$. Osserviamo che $Q \cup \langle x\rangle = Q\langle x\rangle$; infatti se $Q^{\langle x\rangle}$ contenesse H allora y centralizzerebbe a, essendo anche $Q^x \lhd H^x\langle y\rangle$ perché $\langle a\rangle \not\lhd H^x\langle y\rangle$; pertanto $\langle x\rangle$ è normalizzato da Q, ed è centralizzato da y perché sta in $Q \cup Q^x$. In conclusione $\langle x\rangle \lhd \langle H, x, y\rangle$ e così axy è un p–elemento, ma da $H \leq_d \langle H, axy\rangle = \langle H, x, y\rangle$ segue $Q \leq_d \langle H, x, y\rangle$ essendo $H_{\langle H,x,y\rangle} = \{1\}$ (1.2). *II caso*: sia $H \leq_q \langle H, y\rangle$. Tutti i Sylowgruppi di H che sono di Hall in $\langle H, y\rangle$ risultano ivi normali (2.1). Deve essere allora $|\langle H, y\rangle : H| = p^i$, y di ordine p–potenza. Risulta anche $H^x \leq_q \langle H^x, y\rangle$, perché diversamente per il ragionamento fatto nel I caso si avrebbe $Q^x \leq_d \langle H^x, x, y\rangle$; dunque $\langle y\rangle(H\langle x\rangle) = (H\langle x\rangle)\langle y\rangle$. Posto $Q_1 = Q \cap H_1$, y normalizza Q_1 altrimenti $(Q_1^{H\langle x\rangle})^{\langle y\rangle} = Q_1^{\langle y\rangle} =$

(5) Se in un gruppo si ha $x = x_1 x_2$ e $(|x|, |x_2|) = 1$, inoltre $[x_1, x_2] = 1$, allora risulta $x_2 \in \langle x_1\rangle$, infatti da $1 = x^{|x|} = x_1^{|x|} x_2^{|x|}$ segue che $\langle x_2^{|x|}\rangle = \langle x_2\rangle \leq \langle x_1\rangle$.

$= Q = (Q_1^{\langle y \rangle})^{H\langle x \rangle} = Q^{\langle x \rangle}$ che contiene almeno un elemento di ordine p. Risulta pertanto $|Q| = q$, $\langle Q , y \rangle = Q \times \langle y \rangle$; se ne deduce che y commuta con un opportuno elemento w di ordine p che sta in $Q^{\langle x \rangle}$, tale che $\langle H , w \rangle = H \langle x \rangle$; yw è un p-elemento e così $H \leq_d \langle H , yw \rangle = \langle H , y , x \rangle$ da cui $Q \leq_d \langle H , y , x \rangle$.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. NAPOLITANI (1967) – *Proprietà reticolari dell'insieme dei sottogruppi subnormali*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *38*, 293–304.

[2] R. SCHMIDT (1969) – *Modulare Untergruppen Endlicher Gruppen*, « Illinois J. of Math. », *13*, 358–377.

[3] R. SCHMIDT (1970) – *Modular subgroups of finite groups*, II, « Illinois J. of Math. », *14*, 344–362.

[4] M. SUZUKI (1956) – *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer.

[5] H. ZASSENHAUS (1958) – *The theory of groups*, Second ed. Chelsea, New York.