Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Sulla risoluzione per numeri interi della equazione $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.6, p. 635–642.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_6_635_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Teoria dei numeri. — *Sulla risoluzione per numeri interi della equazione* $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$. Nota (*) del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper the author considers the entire, positive or negative, solutions of the equation $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$, and establishes various formulas expressing the unknowns by means of two, three or four arbitrary parameters. The question has geometrical interest for the determination of the rational points of the cubic surface $X^3 + Y^3 + Z^3 = 1$.

1. Come è noto l'equazione $x^3 + y^3 = z^3$, che è un caso particolare dell'equazione di Fermat $(x^n + y^n = z^n\,;\, n \geq 3)$, non ha soluzioni in numeri interi, mentre l'equazione $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ ammette, come si sa, infinite soluzioni [1]. Una soluzione generale di quest'ultima equazione, dipendente da quattro parametri arbitrari, fu assegnata da Eulero [2], [3], mentre soluzioni più particolari furono ottenute da altri Autori (cfr. [3]).

In questa Nota, occupandomi della questione, ho assegnato dell'equazione proposta alcune rappresentazioni delle incognite mediante due, tre ed anche quattro parametri arbitrari, che mi sembrano nuove e meritevoli di essere conosciute.

Equazioni cubiche più generali sono state considerate da L. J. Mordell [4], da B. Segre [5] e da altri, che ne hanno dimostrato l'esistenza, o meno, di soluzioni razionali. Il Segre ha poi ampiamente analizzato il caso della piu generale equazione cubica omogenea in quattro variabili con coefficienti razionali e fatte diverse estensioni.

Queste questioni hanno ovviamente anche interesse geometrico in quanto equivalgono a determinare i punti razionali di una superficie cubica. A questo riguardo uno studio profondo delle proprietà aritmetiche delle superficie cubiche è stato effettuato da B. Segre nei lavori citati in [5].

2. La data equazione si può scrivere

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (u - z)(u^2 + uz + z^2)\,. \tag{1}$$

Ponendo

$$\xi = x + y \quad , \quad \eta = x - y \quad , \quad \zeta = u + z \quad , \quad \tau = u - z\,, \tag{2}$$

e osservando che

$$4(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^2 + 3(x - y)^2 = \xi^2 + 3\eta^2$$
$$4(u^2 + uz + z^2) = 3(u + z)^2 + (u - z)^2 = 3\zeta^2 + \tau^2\,.$$

(*) Presentata nella seduta del 13 dicembre 1975.

la (1) divenuta

$$\xi(\xi^2 + 3\eta^2) = \tau(3\zeta^2 + \tau^2). \tag{3}$$

Un primo modo di soddisfare questa equazione è di supporre ξ divisibile per τ, e quindi

$$\xi = m\tau. \tag{4}$$

La (3) porge allora

$$\tau^2 = \frac{3(\zeta^2 - m\eta^2)}{m^3 - 1}. \tag{5}$$

Ponendo ancora

$$\zeta = m^2\eta, \tag{6}$$

si ha

$$\tau^2 = 3m\eta^2, \tag{7}$$

e si ha per τ un numero intero assumendo $m = 3p^2$, con p intero. Si ottiene così dalle (7), (4) e (6).

$$\tau = 3p\eta \quad , \quad \xi = 9p^2\eta \quad , \quad \zeta = 9p^4\eta. \tag{8}$$

Dalle (2) si ricava quindi una prima classe di soluzioni

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(9p^3 + 1)\eta \quad , \quad y = \frac{1}{2}(9p^3 - 1)\eta \\ z &= \frac{3}{2}p(3p^3 - 1)\eta \quad , \quad u = \frac{3}{2}p(3p^3 + 1)\eta, \end{aligned} \tag{9}$$

dove per p dispari si può assumere $\eta = 1$, e per p pari $\eta = 2$. Da ogni quaterna di numeri x, y, z, u che così si ottiene se ne deducono delle altre moltiplicando x, y, z, u per un intero arbitrario, ovvero scegliendo η uguale a un numero dispari o pari qualsiasi.

Ponendo nelle (9) $p = r/s$, $\eta = s^4$, esse si trasformano nelle seguenti

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}s(9r^3 + s^3) \quad , \quad y = \frac{1}{2}s(9r^3 - s^3) \\ z &= \frac{3}{2}r(3r^3 - s^3) \quad , \quad u = \frac{3}{2}r(3r^3 + s^3), \end{aligned} \tag{10}$$

che sono formule dipendenti da due parametri.

Dalle (9), per $p = 1, 2, 3, \cdots$ si hanno le soluzioni

$$\begin{array}{llll} x = 5 \quad , & y = 4 \quad , & z = 3 \quad ; & u = 6 \\ x = 73 \quad , & y = 71 \quad , & z = 138 \quad ; & u = 150 \\ x = 122 \quad , & y = 121 \quad , & z = 360 \quad ; & u = 369, \text{ ecc.}) \end{array} \tag{11}$$

le quali seguono anche dalle (10) per $r = 1, 2, 3, \cdots, s = 1$. Ma dalle (10) si hanno nuove soluzioni dando ad s valori diversi da 1. Così per esempio per $r = 3, s = 2$, si ha

$$x = 502 \quad , \quad y = 470 \quad , \quad z = 657 \quad ; \quad u = 801. \tag{11'}$$

3. Una seconda classe di soluzioni si ottiene ponendo nella (5)

$$\zeta = (m + 1)\eta .$$

In questo caso si ha

$$\tau^2 = 3\eta^2/(m - 1)$$

e ponendo ancora

$$m = 3p^2 + 1 \quad , \quad \eta = 2pq ,$$

si deduce

$$\tau = 2q \quad , \quad \xi = 2q(3p^2 + 1) \quad , \quad \eta = 2pq \quad , \quad \zeta = 2pq(3p^2 + 2) .$$

Da queste in virtù della (2) segue

$$\begin{aligned} x &= q(3p^2 + p + 1) \quad , \quad & y &= q(3p^2 - p + 1) \\ z &= q[p(3p^2 + 2) - 1] \quad , \quad & u &= q[p(3p^2 + 2) + 1] , \end{aligned} \tag{12}$$

che è la seconda classe di soluzioni richieste.

Ponendo nelle (12) $p = r/s, q = s^3$, si ha anche

$$\begin{aligned} x &= s(3r^2 + rs + s^2) \quad , \quad & y &= s(3r^2 - rs + s^2) \\ z &= 3r^3 + 2rs^2 - s^3 \quad , \quad & u &= 3r^3 + 2rs^2 + s^3 , \end{aligned} \tag{13}$$

le quali formule dipendono da due parametri.

Dalle (12), per $p = 2, 3, \cdots, q = 1$, si hanno le seguenti soluzioni

$$\begin{aligned} x &= 15 \quad , \quad y = 11 \quad , \quad z = 27 \quad ; \quad u = 29 \\ x &= 31 \quad , \quad y = 25 \quad , \quad z = 86 \quad ; \quad u = 88 \quad , \text{ ecc.} \end{aligned} \tag{14}$$

Le soluzioni (14) si ottengono anche dalle (13) per $r = 2, 3, \cdots, y = 1$. Ma le (13) forniscono delle nuove soluzioni per $s \neq 1$. Così per esempio per $r = 1$, $s = 2$, si ha

$$x = 18 \quad , \quad y = 10 \quad , \quad z = 3 \quad ; \quad u = 19 . \tag{14'}$$

Scrivendo ora nella (5) m^2/n^2 in luogo di m (e quindi anche nella (4)), si ha

$$\tau^2 = 3n^4(n^2\zeta^2 - m^2\tau^2)/(m^6 - n^6) , \tag{15}$$

e ponendo

$$n\zeta + m\eta = \rho(m^3 + m^3) \quad , \quad n\zeta - m\eta = 3\rho(m^3 - n^3) \tag{16}$$

si ottiene

$$\tau^2 = 9\,\rho^2 n^4 \quad , \quad \tau = 3\,\rho n^2 \quad , \quad \xi = m^2\,\tau/n^2 = 3\,\rho m^2$$

$$\zeta = \rho\,(2\,m^3 - n^3)/n \quad , \quad \eta = \rho\,(2\,n^3 - m^3)/m\,.$$

Dalle (2) segue allora, ponendo $\rho = mn$, la seguente rappresentazione

$$\text{(17)} \qquad \begin{aligned} x &= n\,(m^3 + n^3) \quad , \quad y = n\,(2\,m^3 - n^3)\,, \\ z &= m\,(m^3 - 2\,n^3) \quad , \quad u = m\,(m^3 + n^3)\,, \end{aligned}$$

segnalatami dal Collega Tricomi. Essa per $m = 3$, $n = 1$, da:

$$x = 28 \quad , \quad y = 53 \quad , \quad z = 75 \quad , \quad u = 84,$$

mentre per $m = 2$, $n = -1$; e per $m = 3$, $n = -1$ si hanno le soluzioni

$$7\,,\,17\,,\,14\,,\,20 \quad ; \quad 26\,,\,55\,,\,78\,,\,87\,.$$

4. Altre formule di rappresentazione si possono ottenere dalla (3) supponendo

$$\text{(19)} \qquad \xi^2 + 3\,\eta^2 = \lambda\tau \quad , \quad 3\,\zeta^2 + \tau^2 = \lambda\xi\,,$$

con λ fattore di proporzionalità.

Dalle (19), per sottrazione e somma, e ponendo

$$\text{(20)} \qquad \xi + \tau = \mathrm{X} \quad , \quad \xi - \tau = \mathrm{Y} \quad , \quad \zeta + \eta = \mathrm{Z} \quad , \quad \zeta - \eta = \mathrm{T}\,,$$

si deducono le equazioni

$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{XY} - 3\,\mathrm{ZT} = -\lambda\mathrm{Y} \\ &\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + 3\,(\mathrm{Z}^2 + \mathrm{T}^2) = 2\,\lambda\mathrm{X}\,. \end{aligned}$$

La prima delle (21), che si può scrivere: $\mathrm{Y}\,(\mathrm{X} + \lambda) = 3\,\mathrm{ZT}$, si può soddisfare ponendo $\mathrm{X} + \lambda = 3\,k\mathrm{Z}$, con k fattore di proporzionalità, e pertanto

$$\text{(22)} \qquad \mathrm{X} = 3\,k\mathrm{Z} - \lambda \quad , \quad \mathrm{T} = k\lambda\,.$$

Sostituendo nella seconda delle (21) si ha l'equazione in Z:

$$\text{(23)} \qquad 3\,(3\,k^2 + 1)\,\mathrm{Z}^2 - 12\,k\lambda\mathrm{Z} + (3\,k^2 + 1)\,\mathrm{Y}^2 + 3\,\lambda^2 = 0\,,$$

il cui discriminante vale

$$\text{(24)} \qquad \Delta = 9\,(k^2 - 1)\,\lambda^2 - 3\,(3\,k^2 + 1)^2\,\mathrm{Y}^2.$$

Considerando più in generale per k dei valori razionali, ponendo $k = r/s$, la (24) diventa

$$\Delta = \frac{1}{s^4}\{9(r^2 - s^2)s^2\lambda^2 - 3(3r^2 + s^2)Y^2\}, \tag{24'}$$

e la questione si riduce a determinare dei valori di r, s, λ, Y, in modo che Δ risulti il quadrato di un numero razionale. Ponendo

$$r + s = 3m^2 \quad , \quad r - s = n^2 \tag{25}$$

e quindi

$$r = \frac{1}{2}(3m^2 + n^2) \quad , \quad s = \frac{1}{2}(3m^2 - n^2) \quad , \quad r^2 - s^2 = 3m^2 n^2 \tag{25'}$$

si ottiene

$$\Delta = \frac{3}{s^4}\{9m^2 n^2 s^2 \lambda^2 - (3r^2 + s^2)^2 Y^2\}.$$

Ponendo ancora

$$3mns\lambda + (3r^2 + s^2)Y = 3\rho p^2$$

$$3mns\lambda - (3r^2 + s^2)Y = \rho q^2$$

si deduce

$$\lambda = \rho\frac{3p^2 + q^2}{6mns} \quad , \quad Y = \rho\frac{3p^2 - q^2}{2(3r^2 + s^2)} \quad , \quad \Delta = \frac{9}{s^4}\rho^2 p^2 q^2 ,$$

mentre la (23) e le (22) porgono

$$Z = \frac{2rs\lambda \pm \rho pq}{3r^2 + s^2} = \rho\frac{r(3p^2 + q^2) \pm 3mnpq}{3mn(3r^2 + s^2)}$$

$$X = \rho\frac{(3r^2 - s^2)(3p^2 + q^2) \pm 18rmnpq}{6mns(3r^2 + s^2)} \quad , \quad T = \rho\frac{r(3p^2 - q^2)}{2s(3r^2 + s^2)} ,$$

dove r, s hanno i valori (25'). Ne segue:

$$\begin{aligned} X &= \rho\{(9m^4 + 12m^2 n^2)(3p^2 + q^2) \pm 18(3m^2 + n^2)mnpq\}/D \\ Y &= 3\rho mn(3m^2 - n^2)(3p^2 - q^2)/D \\ Z &= \rho(3m^2 - n^2)\{(3m^2 + n^2)(3p^2 + q^2) \pm 6mnpq\}/D \\ T &= 3\rho mn(3m^2 + n^2)(3p^2 - q^2)/D , \end{aligned} \tag{26}$$

dove si è posto $D = 12mns(3r^2 + s^2)$.

In virtù delle (2) e (20) si ha ora

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(X + Z + Y - T) \quad , \quad y = \frac{1}{4}(X - Z + Y + T), \\ z &= \frac{1}{4}(Z - X + Y + T) \quad , \quad u = \frac{1}{4}(X + Z + T - Y). \end{aligned} \tag{27}$$

Sostituendo in luogo di X , Y , Z , T, i valori (26), e ponendo $\rho = 2\,D$, si hanno le seguenti formule risolutive

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
x &= 3m\,\{3\,(3m^3 + 2mn^2 - n^3)\,p^2 + (3m^3 + 2mn^2 + n^3)\,q^2 \pm \\
&\qquad \pm 2n\,(6m^2 + n^2)\,pq\} \\
y &= n\,\{3\,(9m^3 + 6m^2n + n^3)\,p^2 + (-9m^3 + 6m^2n + n^3)\,q^2 \pm \\
&\qquad \pm 6m\,(3m^2 + 2n^2)\,pq\} \\
z &= n\,\{3\,(9m^3 - 6m^2n - n^3)\,p^2 - (9m^3 + 6m^2n + n^3)\,q^2 \mp \\
&\qquad \mp 6m\,(3m^2 + 2n^2)\,pq\} \\
u &= 3m\,\{3\,(3m^3 + 2mn^2 + n^3)\,p^2 + (3m^3 + 2mn^2 - n^3)\,q^2 \pm \\
&\qquad \pm 2n\,(6m^2 + n^2)\,pq\}\,,
\end{aligned}
$$

che dipendono dai quattro parametri m , m , p , q. Ma si riconosce facilmente che i rapporti x/u, y/u, z/u dipendono unicamente dai due rapporti m/n , p/q, come deve essere per le coordinate di un punto di una superficie.

Ad esempio per $m = n = 1$, $p = 6$, $q = 1$, le formule (28) porgono le soluzioni$_t$

783, 953, 10, 1104 ; 531, 773, 190, 852.

Prendendo nelle (28) il segno inferiore davanti ai termini in pq, e ponendo $m = n = 1$, $p = 3$, $q = 4$, oppure $p = 3$, $q = 2$, si hanno le seguenti altre soluzioni in numeri interi positivi:

54, 20, 79, 87 ; 72, 122, 85, 141.

5. Altre soluzioni dell'equazione proposta si possono ottenere scrivendo la (3) nella forma

$$
(29)\qquad (\xi - \tau)(\xi^2 + \xi\tau + \tau^2) = 3\,(\tau\zeta^2 - \xi\eta^2)
$$

e scindendo questa equazione nelle due

$$
(30)\qquad \xi - \tau = 3\,\mu \quad , \quad \tau\zeta^2 - \xi\eta^2 - \mu\,(\xi^2 + \xi\tau + \tau^2).
$$

Eliminando la ξ si ha la seguente equazione di 2° grado in τ

$$
(31)\qquad 3\,\mu\tau^2 + [9\,\mu^2 - (\zeta^2 - \eta^2)]\,\tau + 3\,\mu\,(\eta^2 + 3\,\mu^2) = 0.
$$

Ponendo

$$
(32)\qquad \zeta + \eta = \mu X \quad , \quad \zeta - \eta = \mu Y
$$

si ricava

$$\tau = \frac{1}{6}\,\mu\,(XY - 9 \pm \sqrt{D})\,, \tag{33}$$

con

$$D = X^2 Y^2 - 9\,(X^2 + Y^2) - 27\,. \tag{34}$$

La questione in questo caso si riduce a determinare delle coppie di numeri interi, o razionali, X, Y, in modo che l'espressione D, che è simmetrica rispetto ad X, Y, risulti il quadrato di un numero intero o razionale.

Osserviamo che se si assegna un valore ad Y, e si cerca di determinare la X, dovrà essere necessariamente $Y \geq 4$.

Se in questo caso poniamo:

$$X = p/q \quad , \quad Y = r/s \quad ; \quad r = \frac{1}{2}\,\rho\,(m^2 + n^2) \quad , \quad s = \frac{1}{6}\,\rho\,(m^2 - n^2) \tag{35}$$

si ha

$$D = \frac{\rho^2}{s^2 q^2}\,\{m^2 n^2 p^2 - 3\,q^2\,(m^4 + m^2 n^2 + n^4)\}\,.$$

e ponendo ancora

$$p = (m^4 + m^2 n^2 + n^4 + 3\,q^2)/(2\,mn)$$

si ottiene

$$D = \frac{\rho^2}{4\,s^2 q^2}\,(m^4 + m^2 n^2 + n^4 - 3\,q^2)^2.$$

Risalendo alle relazioni (33), (32), (30) (e 2), e prendendo $\mu = 4\,qmn\,(m^2 - n^2)$ si hanno in definitiva le altre formule risolutive

$$\begin{aligned}
x &= m\,\{(m \pm n)\,(m^4 + m^2 n^2 + n^4) + 3\,q^2\,(m \mp n) - 6\,qn^3\}\\
y &= n\,\{(n \pm m)\,(m^4 + m^2 n^2 + n^4) + 3\,q^2\,(n \mp m) + 6\,qm^3\}\\
z &= n\,\{-(n \pm m)\,(m^4 + m^2 n^2 + n^4) - 3\,q^2\,(n \mp m) + 6\,qm^3\}\\
u &= m\,\{(m \pm n)\,(m^4 + m^2 n^2 + n^4) + 3\,q^2\,(m \mp n) + 6\,qn^3\},
\end{aligned} \tag{37}$$

che dipendono da tre parametri interi arbitrari m, n, q.

Ad esempio per $m = 2$, $n = 1$, $q = 2$, a meno di un fattore di proporzionalità, si hanno le soluzioni: 42, 49, 15, 58; 30, 37, 27, 46.

Un'altra rappresentazione mediante due soli parametri si ottiene ponendo

$$p = \frac{1}{2}\,(m^2 + 3\,n^2) \quad , \quad q = \frac{1}{6}\,(m^2 - 3\,n^2) \quad ; \quad r = \frac{s}{mn}\,(m^2 + 3\,n^2),$$

e si perviene alle formule

$$
(37)\qquad
\begin{aligned}
x &= 3\,\{n^2\,(m^2 + 3\,n^2) + m^3\,n \pm m^2\,n^2\} \\
y &= m^2\,(m^2 + 3\,n^2) - 9\,mn^3 \pm 3\,m^2\,n^2 \\
z &= 3\,\{-\,n^2\,(m^2 + 3\,n^2) + m^3\,n \mp m^2\,n^2\} \\
u &= m^2\,(m^2 + 3\,n^2) + 9\,mn^3 \pm 3\,m^2\,n^2\}\,.
\end{aligned}
$$

che per $m = 3$, $n = 1$, a meno di un fattore di proporzionalità porgono la soluzione: 8, 6, 1, 9.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. SIERPINSKI (1964) – *Elementary theory of numbers*, Chap. XI. Warszawa.
[2] EULER – *Opera omnia* (1), I, 490–7.
[3] L. E. DICKSON (1920) – *History of the theory of numbers*, vol. II, Chap. XXI, p. 552. Washington.
[4] L. J. MORDELL (1942) – *On sums of three cubes*, « J. London Math. Soc. », *17*, 139–144.
[5] B. SEGRE (1943) – *A note on arithmetical properties of cubic surfaces*, « J. London Math. Soc. », *18*, 24–31; (1943) – *On a parametric solution of the equation* $x^3 + y^3 + az^3 = b$ *and on ternary forms representing every rational number*, « J. London Math Soc. », *18*, 31–34; (1944) – *On arithmetical properties of singular cubic surface*, « J. London Math. Soc. », *19*, 24–91; (1949) – *Sur les points entiers des surfaces cubiques*. « Colloque Internat. d'Algèbre et theory on numbers », Paris 81–82; – *On the rational solutions of homogeneon. cubic equations in four variables*, «Mathematical Notae », *11* (1–2); (1942) – *The non singular cubic surfaces*. Claredon Press.