Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Barlotti

# Osservazioni sulle classi di Fitting normali

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **59** (1975), n.6, p. 620–626.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_6_620_0>

**Algebra.** — *Osservazioni sulle classi di Fitting normali.* Nota [(*)] di MARCO BARLOTTI, presentata [(**)] dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Two normal Fitting classes are considered, and it is proved that one contains the other.

1.

Tutti i gruppi che consideriamo sono supposti finiti e risolubili, anche se ciò non sarà più esplicitamente ricordato.

Una classe $\mathfrak{F}$ di gruppi chiusa rispetto agli isomorfismi si dice una *classe di Fitting* se

(i) $N \triangleleft G, G \in \mathfrak{F} \Rightarrow N \in \mathfrak{F}$

(ii) $N_1, N_2 \triangleleft G, N_1, N_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow N_1 N_2 \in \mathfrak{F}$.

Sia G un gruppo.

Se $\mathfrak{F}$ è una classe di Fitting, il prodotto di tutti i sottogruppi normali di G appartenenti a $\mathfrak{F}$ si indica con $G_{\mathfrak{F}}$ e si dice lo $\mathfrak{F}$*-radicale* di G. Se $\mathfrak{F}$ è la classe dei gruppi aventi ordine dispari, poniamo $O(G) = G_{\mathfrak{F}}$.

Un sottogruppo X di G per cui esiste una classe di Fitting $\mathfrak{F}$ tale che $X = G_{\mathfrak{F}}$ si dice un *radicale* di G.

Se X, Y sono due radicali di G tali che $Y < X$ e per ogni radicale Z di G da $Y \le Z < X$ segue $Y = Z$, il gruppo quoziente $X/Y$ si dice un *fattore di Fitting* di G.

In [3] si prova che ogni fattore di Fitting è un $p$-gruppo.

Sia $\mathfrak{F}$ una classe di Fitting; un sottogruppo H di G si dice $\mathfrak{F}$*-massimale* se $H \in \mathfrak{F}$ e da $H \le K \le G$ con $K \in \mathfrak{F}$ segue $H = K$.

Una classe di Fitting $\mathfrak{F}$ si dice *normale* se $G_{\mathfrak{F}}$ è $\mathfrak{F}$-massimale per ogni gruppo G.

La seguente costruzione è dovuta a G. Zappa ([3]).

Sia G un gruppo e sia $X/Y$ un fattore di Fitting di G. Sia S una serie principale di G passante per X e Y, e siano $M_1, \cdots, M_r$ i fattori principali appartenenti a S compresi fra X e Y; essi sono $p$-gruppi abeliani elementari per uno stesso numero primo $p$, e si possono dunque pensare come spazi vettoriali su GF$(p)$. Ogni $g \in G$ induce mediante il coniugio un automorfismo in ogni $M_i$; il gruppo di automorfismi così indotto da G in $M_i$ risulta come è noto isomorfo a un gruppo di matrici $D_i(g)$ a elementi in GF$(p)$. Sia $d_i(g) = \det D_i(g)$. Poniamo

$$d_{G,X,Y}(g) = \prod_{i=1}^{r} d_i(g).$$

(*) Lavoro effettuato mentre l'autore usufruiva di una borsa di studio del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1975.

La classe $\mathfrak{B}$ dei gruppi G tali che $d_{G,X,Y}(g) = 1$ per ogni $g \in G$ e per ogni fattore di Fitting X/Y di G è una classe di Fitting normale detta *classe di Fitting normale speciale*.

Vogliamo provare che $\mathfrak{B}$ è contenuta nella classe di Fitting normale $\mathfrak{F}_0$ introdotta in [1] e definita come segue: $G \in \mathfrak{F}_0$ se e solo se ogni $g \in G$ induce su O(G) (mediante il coniugio) una permutazione di classe pari.

## 2.

Per tutto questo paragrafo $q$ sarà un primo dispari, $V(n, q)$ lo spazio vettoriale di dimensione $n$ su $GF(q)$, $GL(n, q)$ il gruppo degli automorfismi di $V(n, q)$ e $SL(n, q)$ il sottogruppo di $GL(n, q)$ formato dagli elementi con determinante uguale a 1.

Come si può facilmente ricavare, ad esempio, da [2], II Satz 6.10, $SL(n, q)$ non ha sottogruppi di indice 2, cosicchè ogni suo elemento induce su $V(n, q)$ una permutazione di classe pari.

Indichiamo con $\tilde{p}_{n,q}$ l'applicazione $GL(n, q) \to \{+1, -1\}$ definita per $A \in GL(n, q)$ da

$$\tilde{p}_{n,q}(A) = +1 \quad \text{se A induce su } V(n,q) \text{ una permutazione di classe pari}$$

$$\tilde{p}_{n,q}(A) = -1 \quad \text{altrimenti.}$$

È immediato che $\tilde{p}_{n,q}$ è un omomorfismo.

Sia $K_q$ il gruppo moltiplicativo di $GF(q)$ e sia det: $GL(n, q) \to K_q$ l'omomorfismo determinante.

Per quanto abbiamo osservato, Ker det $\leq$ Ker $\tilde{p}_{n,q}$, cosicché $\tilde{p}_{n,q}$ definisce un omomorfismo

$$p_{n,q} : K_q \to \{+1, -1\}.$$

Si può infatti porre, se $d \in K_q$, $p_{n,q}(d) = \tilde{p}_{n,q}(A)$ dove A è un qualunque elemento di $GL(n, q)$ con det $A = d$.

Vogliamo provare che $p_{n,q}$ dipende solo da $q$ e non da $n$; a tale scopo costruiamo esplicitamente un algoritmo che non dipende da $n$ per il calcolo di $p_{n,q}(d)$ $(d \in K_q)$.

Fissiamo una base $\{x, y_1, \cdots, y_{n-1}\}$ in $V(n, q)$ e calcoliamo $p_{n,q}(d)$ considerando l'automorfismo che rispetto a tale base ha la matrice

$$\begin{pmatrix} d & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Sia $\varphi$ la permutazione indotta su $V(n, q)$ da tale automorfismo, e consideriamo la decomposizione di $\varphi$ in cicli disgiunti.

2.1. *Se* $w, z \in V(n, q)$, $m \in K_q$ *e* $w^\varphi = w$, *il ciclo a cui appartiene* $z$ *ha la stessa lunghezza di quello a cui appartiene* $z^m$ *e di quello a cui appartiene* $zw$.

*Dimostrazione*. Sia $(z, g_1, \cdots, g_t)$ il ciclo a cui appartiene $z$. I trasformati successivi di $z^m$ mediante $\varphi$ sono

$$z^m, g_1^m, \cdots, g_t^m, z^m$$

e i trasformati successivi di $zw$ mediante $\varphi$ sono

$$zw, g_1 w, \cdots, g_t w, zw.$$

Per $i \leq t$ non può essere $g_i^m = z^m$ (infatti si avrebbe anche $g_i = (g_i^m)^{m^{-1}} = (z^m)^{m^{-1}} = z$) nè $g_i w = zw$ (infatti si avrebbe anche $g_i = z$) da cui l'asserto. (C.V.D.)

Vediamo ora come opera $\varphi$ sugli elementi di $V(n, q)$, che penseremo nella forma $x^\alpha y_1^{\beta_1}, \cdots, y_{n-1}^{\beta_{n-1}}$ $(\alpha, \beta_i \in GF(q))$. Poichè $x^\varphi = x^d$ e $y_i^\varphi = y_i$ $(i = 1, \cdots, n-1)$, $\varphi$ lascia fissi i $q^{n-1}$ elementi con $\alpha = 0$ mentre agisce in modo non identico su ciascuno dei restanti $q^n - q^{n-1} = q^{n-1}(q-1)$; per 2.1, inoltre, tutti i cicli non banali della decomposizione di $\varphi$ hanno la stessa lunghezza $l$ e sono dunque in numero di $\frac{q-1}{l} q^{n-1}$.

Il ciclo a cui appartiene $x$ è del tipo

$$(x, x^d, x^{d^2}, \cdots, x^{d^{l-1}})$$

cioè $l$ è il più piccolo intero positivo per cui $d^l = 1 \pmod q$.

Poiché il gruppo moltiplicativo di GF $(q)$ ha ordine $q-1$, $l$ è un divisore di $q-1$.

È facile ora determinare la parità di $\varphi$, cioè $p_{n,q}(d)$.

Se $l$ è dispari, e quindi $\frac{q-1}{l}$ è pari, $\varphi$ si decompone in cicli tutti di lunghezza dispari e dunque $p_{n,q}(d) = +1$.

Se $l$ è pari, $\varphi$ si decompone in $\frac{q-1}{l} q^{n-1}$ cicli tutti di lunghezza pari, e dunque, poiché $q$ è un numero dispari, si ha in questo caso

$$p_{n,q}(d) = +1 \quad \text{se} \quad \frac{q-1}{l} \quad \text{è pari}$$

$$p_{n,q}(d) = -1 \quad \text{se} \quad \frac{q-1}{l} \quad \text{è dispari.}$$

Riassumendo:

2.2. *Sia* $l$ *il minimo intero positivo tale che* $d^l = 1 \pmod q$ ($l$ *é un divisore di* $q-1$). *Si ha*

$$p_{n,q}(d) = +1 \quad \textit{se} \quad \frac{q-1}{l} \quad \textit{è pari}$$

$$p_{n,q}(d) = -1 \quad \textit{se} \quad \frac{q-1}{l} \quad \textit{è dispari.}$$

In particolare, $p_{n,q}(d)$ non dipende da $n$. Ciò permette di enunciare il seguente risultato:

2.3. *Sia $q$ un primo dispari.*

*Esiste un omomorfismo $p_q$ dal gruppo moltiplicativo $K_q$ di $GF(q)$ nel gruppo moltiplicativo $\{+1, -1\}$ tale che per $d \in K_q$ si ha*

| | |
|---|---|
| $p_q(d) = +1$ | *se e solo se per ogni intero positivo $n$ ogni elemento di $GL(n, q)$ con determinante $d$ induce su $V(n, q)$ una permutazione di classe pari* |
| $p_q(d) = -1$ | *se e solo se per ogni intero positivo $n$ ogni elemento di $GL(n, q)$ con determinante $d$ induce su $V(n, q)$ una permutazione di classe dispari.* |

3.

Se $\sigma$ è una permutazione su un insieme dato, scriveremo

$$p(\sigma) = +1 \qquad \text{se } \sigma \text{ è di classe pari}$$

$$p(\sigma) = -1 \qquad \text{altrimenti.}$$

Come è noto, se $\sigma$ e $\tau$ sono permutazioni sullo stesso insieme si ha $p(\sigma\tau) = p(\sigma)\,p(\tau)$.

3.1. *Sia B un gruppo di ordine dispari, e sia $A \lhd B$. Sia $\varphi$ una permutazione su B che muta A in sè e siano $\vartheta$, $\psi$ le permutazioni indotte da $\varphi$ su A e su B/A rispettivamente, definite da*

$$a^{\vartheta} = a^{\varphi} \qquad a \in A$$

$$(Ab)^{\psi} = Ab^{\varphi} \qquad Ab \in B/A.$$

*Allora si ha $p(\varphi) = p(\vartheta)\,p(\psi)$.*

*Dimostrazione.* Sia $\{r_i\}$ un sistema di rappresentanti fissato per le classi laterali di A in B.

Sia $\delta_{(1)}$ la permutazione su B che muta in sè ogni classe laterale definita da

$$(ar_i)^{\delta(1)} = a^{\varphi} r_i = a^{\vartheta} r_i \qquad ar_i \in Ar_i.$$

Poichè le classi laterali di A in B sono in numero dispari (teorema di Lagrange) si ha

$$P(\delta_{(1)}) = p(\vartheta).$$

Sia poi $\delta_{(2)}$ la permutazione su B che porta gli elementi del laterale $Ar_i$ in quelli del laterale $Ar_i^\varphi = (Ar_i)^\psi$ definita da

$$(ar_i)^{\delta(2)} = ar_i^\varphi \qquad ar_i \in Ar_i .$$

Per ogni elemento $ar_i$ di B si ha

$$(ar_i)^{\delta(1)\,\delta(2)} = ((ar_i)^{\delta(1)})^{\delta(2)} = (a^\varphi r_i)^{\delta(2)} = a^\varphi r_i^\varphi = (ar_i)^\varphi$$

cosicché $\delta_{(1)}\, \delta_{(2)} = \varphi$ e quindi

$$p(\varphi) = p(\delta_{(1)})\, p(\delta_{(2)}) = p(\vartheta)\, p(\delta_{(2)}).$$

Per provare l'asserto resta dunque da mostrare che $p(\delta_{(2)}) = p(\psi)$.

Consideriamo a tale scopo una decomposizione di $\psi$ in $k$ trasposizioni $T_1, T_2, \cdots, T_k$ (ricordiamo che $p(\psi) = +1$ o $p(\psi) = -1$ secondo che $k$ sia rispettivamente pari o dispari).

Alla trasposizione $T_i = (Ar_l, Ar_m)$ associamo le $|A|$ trasposizioni (disgiunte)

$$\tau_i^a = (ar_l, ar_m) \qquad a \in A .$$

Sia $\zeta$ la permutazione su B definita da

$$\zeta = \prod_{a \in A} \tau_1^a \prod_{a \in A} \tau_2^a \cdots \prod_{a \in A} \tau_k^a .$$

$\zeta$ è il prodotto di $|A|\, k$ trasposizioni, dunque (poiché $A \leq B$) $\zeta$ è una permutazione di classe pari o dispari secondo che $k$ sia rispettivamente pari o dispari, cioè $p(\zeta) = p(\psi)$.

Il modo di operare di $\zeta$ sugli elementi di B è evidentemente il seguente:

$$ar_i \xrightarrow{\zeta} ar_j \qquad \text{se } r_j \text{ è il rappresentante fissato per la classe } (Ar_i)^\psi = Ar_i^\varphi$$

Sia ora $\eta$ la permutazione su B che muta in sé ogni classe laterale definita come segue sulla generica classe laterale $Ar_j$:

$$\text{se} \quad Ar_j = (Ar_i)^\psi \ , \quad (ar_j)^\eta = ar_i^\varphi$$

cioè $\eta$ è la moltiplicazione a destra per $r_j^{-1} r_i^\varphi$.

È evidente che ogni ciclo indotto da $\eta$ ha per lunghezza il periodo di $r_j^{-1} r_i^\varphi$, cioè (poiché $r_j^{-1} r_i^\varphi \in B$) ha lunghezza dispari e dunque $\eta$ è una permutazione di classe pari.

Allora $p(\zeta\eta) = p(\zeta) = p(\psi)$.

Ma è immediato che $\zeta\eta = \delta_{(2)}$ e dunque il teorema è provato (C.V.D.).

Sia G un gruppo. Una catena principale

$$X_1 \lhd X_2 \lhd \cdots \lhd X_k$$

di G di estremi $X_1$ e $X_k$ si dirà una *serie di Fitting* di G di estremi $X_1$ e $X_k$ se

(i) ciascun $X_i$ è un radicale di G;

(ii) $X_{i+1}/X_i$ è un fattore di Fitting di G per $i = 1, 2, \cdots, k-1$.

Evidentemente, comunque presi due radicali X, Y di un gruppo G con $X \leq Y$ esiste una serie di Fitting di G di estremi X e Y.

3.2. *Sia* G *un gruppo e sia*

$$\langle 1 \rangle = X_0 \lhd X_1 \lhd \cdots \lhd X_k = O(G)$$

*una serie di Fitting di* G *di estremi* $\langle 1 \rangle$ *e* O(G). *Sia* $g \in G$ *tale che* $d_{G,X_r,X_{r-1}}(g) = 1$ *per* $0 < r \leq j \leq k$. *Allora* $g$ *induce su* $X_j$ *una permutazione di classe pari.*

*Dimostrazione.* Proviamo il teorema per induzione su $j$.

Se $j = 0$ l'asserto è banale, dunque possiamo supporlo vero per $j - 1$.

Se $g \in G$ e $d_{G,X_r,X_{r-1}}(g) = 1$ per $0 < r \leq j$ è anche $d_{G,X_r,X_{r-1}}(g) = 1$ per $0 < r \leq j - 1$ cosicché per l'ipotesi di induzione $g$ induce su $X_{j-1}$ una permutazione di classe pari.

Vogliamo provare che $g$ induce su $X_j$ una permutazione di classe pari. Sia

$$\langle 1 \rangle \lhd \cdots \lhd X_{j-1} = A_0 \lhd A_1 \lhd \cdots \lhd A_n = X_j \lhd \cdots \lhd G$$

una serie principale di G passante per $X_{j-1}$ e $X_j$. Indichiamo con $\varphi_i$ la permutazione indotta da $g$ su $A_i$ $(i = 0, \cdots, n)$ e con $d_t(g)$ il determinante dello automorfismo indotto da $g$ su $A_t/A_{t-1}$; sia $q^m$ l'ordine di $X_j/X_{j-1}$; vogliamo provare che per $1 \leq i \leq n$ si ha

$$p(\varphi_i) = \prod_{t=1}^{i} p_q(d_t(g)) = p_q\left(\prod_{t=1}^{i} d_t(g)\right).$$

Ne seguirà per $i = n$

$$p(\varphi_n) = p_q\left(\prod_{t=1}^{n} d_t(g)\right) = p_q(d_{G,X_{j-1},X_j}(g))$$

e poiché per ipotesi $d_{G,X_{j-1},X_j}(g) = 1$ si avrà

$$p(\varphi_n) = p_q(1) = +1.$$

Ma $\varphi_n$ è la permutazione indotta da $g$ su $A_n = X_j$ e dunque avremo provato che $g$ induce su $X_j$ una permutazione di classe pari.

Procediamo per induzione su $i$.

Sia $i = 1$. Vogliamo applicare il Teorema 3.1 con $A = A_0$, $B = A_1$, $\varphi = \varphi_1$.

È immediato che allora $\vartheta = \varphi_1|_{A_0} = \varphi_0$ e che $\psi$ è la permutazione indotta da $g$ sul fattore $A_1/A_0$, cosicché $p(\vartheta) = 1$ (perché per ipotesi $g$ induce su $X_{j-1}$

una permutazione di classe pari) e $p(\psi) = p_q(d_1(g))$. Si ha così

$$p(\varphi_1) = p(\varphi) = p(\vartheta)\, p(\psi) = p_q(d_1(g))$$

come si voleva.

Analogamente si prova, sotto l'ipotesi d'induzione

$$p(\varphi_{i-1}) = \prod_{t=1}^{i-1} p_q(d_t(g))$$

che

$$p(\varphi_i) = \prod_{t=1}^{i} p_q(d_t(g))\,.$$

Sia infatti $A = A_{i-1}$, $B = A_i$, $\varphi = \varphi_i$ e si applichi il Teorema 3.1.

Ancora una volta $\vartheta = \varphi_{i-1}$ $\left(\text{cosicché per l'ipotesi di induzione } p(\vartheta) = \prod_{t=1}^{i-1} p_q(d_t(g))\right)$ e $p(\psi) = p_q(d_i(g))$ e così

$$\begin{aligned} p(\varphi_i) &= p(\varphi) = p(\vartheta)\, p(\psi) = \\ &= \left(\prod_{t=1}^{i-1} p_q(d_t(g))\right) p_q(d_i(g)) = \\ &= \prod_{t=1}^{i} p_q(d_t(g)) \end{aligned}$$

(C.V.D.).

Sia $G \in \mathfrak{B}$. Ciò significa che ogni $g \in G$ soddisfa le ipotesi di 3.2 con $j = k$, e dunque ogni $g \in G$ induce su $O(G)$ una permutazione di classe pari. Ne segue che $G \in \mathfrak{F}_0$, e si è così provato che $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}_0$ come si voleva.

## Bibliografia

[1] D. Blessenhol e W. Gaschütz (1970) – *Über normale Schunck- und Fittingklassen*, «Math. Z.», *118*, 1–8.

[2] B. Huppert (1967) – *Endliche gruppen*, I, Springer.

[3] G. Zappa (1975) – *Su certe classi di Fitting normali*, « Bollettino U.M.I. », (4) *11*, Suppl. fasc. 3, 525–530.