Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luisa Arlotti

Sull'equazione dell'associatività generalizzata

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.5, p. 430–432.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_5_430_0>

Scienza dell'informazione. — *Sull'equazione dell'associatività generalizzata.* Nota di LUISA ARLOTTI, presentata (*) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — The solution is pointed out of the generalized associativity equation

$$\varphi(p_1+p_2, p_3, \varphi(p_1, p_2, u_1, u_2), u_3) = \varphi(p_1, p_2+p_3, u_1, \varphi(p_2, p_3, u_2, u_3))$$

within suitable assumptions of continuity, monotonicity and idempotence.

B. Forte [1] è giunto a un'equazione funzionale detta dell'associatività generalizzata che traduce analiticamente l'ipotesi fisica di associatività della legge di composizione per l'informazione di esperienza.

Si ponga:

$$F(x, y) = -c \log(e^{-x/c} + e^{-y/c})$$

essendo c una costante positiva, $x \in R^+$, $y \in R^+$;

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : x \in R^+, y \in R^+, F(x, y) \in R^+\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Gamma_2, (y, z) \in \Gamma_2, (z, x) \in \Gamma_2\}$$

$$\Gamma_4 = \{(x, y, u, v) : (x, y) \in \Gamma_2, u \in R^+, v \in R^+\}.$$

L'equazione in discorso è allora

$$(a_1) \qquad \varphi(F(x_1, x_2), x_3, \varphi(x_1, x_2, u_1, u_2), u_3) = \\ = \varphi(x_1, F(x_2, x_3), u_1, \varphi(x_2, x_3, u_2, u_3))$$

φ essendo un'applicazione di Γ_4 in R^+. La $F(x, y)$ è la legge di composizione di evento. In una Memoria in corso di stampa sugli Annali dell'Università di Ferrara [2] ho studiato l'equazione (a_1). Anzitutto ho ammesso φ continua, simmetrica, monotona, idempotente; tutte ipotesi fisicamente significative, come si può riconoscere dal citato lavoro di B. Forte [1]. Più esattamente ho ricercato tutte le funzioni φ continue che verificano (a_1) $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_3$, $u_k \in R^+$ $(k = 1, 2, 3)$ e che godono inoltre delle proprietà seguenti:

$$(a_2) \qquad \forall (x, y, u, v) \in \Gamma_4 : \varphi(x, y, u, v) = \varphi(y, x, v, u)$$

$$(a_3) \qquad \forall (x, y, u, v') \in \Gamma_4 : v'' \geq v' \text{ implica } \varphi(x, y, u, v') \leq \varphi(x, y, u, v'')$$

$$(a_4) \qquad \forall (x, y, u, u) \in \Gamma_4 : \varphi(x, y, u, u) = u.$$

(*) Nella seduta del 15 novembre 1975.

In queste ipotesi ho ottenuto che per ogni φ siffatta si verifica quanto segue:

Esistono due numeri reali non negativi λ_1, λ_2 con $\lambda_1 \leq \lambda_2$ (può anche essere $\lambda_2 = +\infty$) e due famiglie numerabili di intervalli aperti disgiunti $]a_i, b_i[$ $(i \in \mathrm{N})$ e $]c_j, d_j[$ $(j \in \mathrm{N})$ (una famiglia almeno può anche essere vuota) in modo che, posto:

$$\mathrm{A}' = \{(u, v) : \mathrm{Sup}\,(u, v) \in [0, \lambda_1] - \bigcup_{i \in \mathrm{N}}]a_i, b_i[\}$$

$$\mathrm{A}'' = \{(u, v) : \mathrm{Inf}\,(u, v) \in [\lambda_2, +\infty[- \bigcup_{j \in \mathrm{N}}]c_j, d_j[\}$$

risulta $\forall (x, y, u, v) \in \Gamma_4$:

$$\varphi(x, y, u, v) = \mathrm{Sup}\,(u, v) \text{ se e solo se } (u, v) \in \mathrm{A}'$$

$$\varphi(x, y, u, v) = \mathrm{Inf}\,(u, v) \text{ se e solo se } (u, v) \in \mathrm{A}''.$$

Inoltre per ogni intervallo $]a_i, b_i[$ esiste una funzione $f_i : [0, b_i[\to \mathrm{R}$ continua, tale che $f_i|_{[0,a_i]}$ è costante, $f_i|_{[a_i,b_i[}$ è crescente con $\lim_{u \to b_i^-} f_i(u) = +\infty$ in modo che $\forall (x, y, u, v) \in \Gamma_4$ con $\mathrm{Inf}\,(u, v) \in [0, b_i[$, $\mathrm{Sup}\,(u, v) \in [a_i, b_i[$ risulta

$$\varphi(x, y, u, v) = f_i^{-1}\left(\frac{e^{-x/c} f_i(u) + e^{-y/c} f_i(v)}{e^{-x/c} + e^{-y/c}}\right)$$

f_i^{-1} essendo l'inversa di $f_i|_{[a_i b_i[}$.

Analogamente per ogni intervallo $]c_j, \mathrm{d}_j[$ esiste una funzione $g_j :]c_j, +\infty[\to \mathrm{R}$ continua tale che $g_j|_{[d_j,+\infty[}$ è costante, $g_j|_{]c_j,d_j]}$ è crescente con $\lim_{u \to c_j^+} g_j(u) = -\infty$ in modo che $\forall (x, y, u, v) \in \Gamma_4$ con $\mathrm{Inf}\,(u, v) \in]c_j, \mathrm{d}_j]$, $\mathrm{Sup}\,(u, v) \in]c_j, +\infty[$ risulta

$$\varphi(x, y, u, v) = g_j^{-1}\left(\frac{e^{-x/c} g_j(u) + e^{-y/c} g_j(v)}{e^{-x/c} + e^{-y/c}}\right)$$

g_j^{-1} essendo l'inversa di $g_j|_{]c_j,d_j]}$.

È poi se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda : \varphi(x, y, u, v) = \lambda \forall (x, y, u, v)$ tale che $\mathrm{Inf}\,(u, v) \in [0, \lambda]$, $\mathrm{Sup}\,(u, v) \in [\lambda, +\infty[$.

Infine se risulta $\lambda_1 < \lambda_2$ esiste una funzione $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ continua tale che $f|_{[0,\lambda_1]}$ e $f|_{[\lambda_2,+\infty[}$ sono costanti, $f|_{[\lambda_1,\lambda_2]}$ è crescente, in modo che $\forall (x, y, u, v) \in \Gamma_4$ con $\mathrm{Inf}\,(u, v) \in [0, \lambda_2]$, $\mathrm{Sup}\,(u, v) \in [\lambda_1, +\infty[$ risulta

$$\varphi(x, y, u, v) = f^{-1}\left(\frac{e^{-x/c} f(u) + e^{-y/c} f(v)}{e^{-x/c} + e^{-y/c}}\right) \tag{1}$$

f^{-1} essendo l'inversa di $f|_{[\lambda_1,\lambda_2]}$.

Si può osservare che se l'ipotesi (a_3) di monotonia viene sostituita dall'ipotesi

$$(a_3') \quad \forall (x, y, u, v') \in \Gamma_4 : v'' > v' \text{ implica } \varphi(x, y, u, v') < \varphi(x, y, u, v'')$$

di stretta monotonia allora dalla dimostrazione del teorema enunciato si riconosce facilmente l'esistenza di una funzione $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ continua, strettamente monotona tale che in tutto Γ_4 sussiste la (1). Quest'ultimo risultato era già noto, perchè ottenuto dall'Autore in un precedente lavoro [3].

Bibliografia

[1] Forte B. (1969) – *Measures of information: the general axiomatic theory*, « Rev. Française Informat. Recherche Opérationelle », *3*, Sér. R–2, 63–89.

[2] Arlotti L. – *Sull'equazione dell'associatività generalizzata*, « Ann. dell'Univ. Ferrara », in corso di stampa.

[3] Arlotti L. (1971) – *Sulle entropie idempotenti a traccia shannoniana*, « Rendiconti Semin. Mat. Univ. Padova », *45*,