Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francois Sigrist

Deux propriétés des groupes $J(CP^{2n})$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.5, p. 413–415.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_5_413_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Topologia. — *Deux propriétés des groupes* J (CP^{2n}). Nota di
FRANÇOIS SIGRIST, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — A complemento di un recente articolo di U. Suter [3], si dànno formule asintotiche che consentono di confrontare l'ordine e l'esponente del gruppo J (CP^{2n}). Si mostra poi che tale gruppo è somma di esattamente [log 2 n/log 2] gruppi ciclici.

INTRODUCTION

La structure des groupes finis J (CP^n) et J (HP^n) n'est que partiellement élucidée. Depuis la démonstration de la conjecture d'Adams, on dispose d'un algorithme explicite de détermination de ces groupes, mais les calculs deviennent rapidement impraticables.

Les propriétés qui vont suivre concernent J (CP^{2n}); leur extension à J (CP^{2n+1}) et J (HP^n) a été omise pour ne pas alourdir la formulation, elle est possible sans difficultés sérieuses.

Un récent article de U. Suter [3] donne de précieux renseignements sur J (CP^{2n}). Afin de motiver ce qui va suivre, en voici deux échantillons:

THÉORÈME A. *L'ordre du fibré de Hopf dans* J (CP^{2n}) *est en même temps l'exposant du groupe. Le sous-groupe engendré par le fibré de Hopf est donc facteur direct.*

THÉORÈME B. *Pour tout p premier, la p-composante de* J (CP^{2n}) *est somme d'au plus* $[\log n/\log p]+1$ *p-groupes cycliques. Elle est nulle pour* $p > 2n+1$.

On va compléter ces propriétés en montrant:

THÉORÈME A'. *L'exposant b_{2n+1} de* J (CP^{2n}) *est grand relativement à son ordre J_{2n}. Plus précisément, on a les formules asymptotiques*

(i) $\log b_{2n+1} = \log (2n)! + o(n)$,

(ii) $\log J_{2n} = \log b_{2n+1} + 2Kn + o(n)$, *avec* $K = \sum_p \log p/(p-1)^2$.

THÉORÈME B'. *La 2-composante de* J (CP^{2n}) *a exactement* $[\log 2n/\log 2]$ *facteurs cycliques. Il en est donc de même du groupe* J (CP^{2n}) *lui-même, par le Théorème* B.

INDICATIONS POUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A'

En compulsant Adams [1] et Adams-Walker [2], on obtient pour b_{2n+1} et J_{2n} les décompositions en facteurs premiers suivantes ($\nu_p(m)$ désigne comme d'habitude l'exposant de p dans la décomposition de m en facteurs

(*) Nella seduta del 15 novembre 1975.

premiers):

$$\nu_p(b_{2n+1}) = \max(r + \nu_p(r)), \qquad 1 \leq r \leq [2n/p - 1];$$
$$\nu_p(J_{2n}) = [2n/p - 1] + [2n/p(p-1)] + [2n/p^2(p-1)] + \cdots.$$

Armé de ces formules, on ramène rapidement le Théorème A′ aux trois lemmes suivants de théorie analytique des nombres:

(i) $$\sum_p \log[2n/p - 1] = o(n),$$

(ii) $$\sum_p [n/p - 1]\log p = \log n! + o(n),$$

(iii) $$\sum_p ([2n/p(p-1)] + [2n/p^2(p-1)] + \cdots)\log p = = 2n\sum_p \log p/(p-1)^2 + o(n).$$

Ces lemmes se démontrent par la routine habituelle de la discipline, théorème des nombres premiers inclus. Seule la démonstration de (ii) requiert quelques astuces pour déjouer les pièges de la parenthèse carrée. Elle est cependant suffisamment élémentaire pour que l'Auteur se sente à l'aise en épargnant au lecteur une typographie encombrante.

DEMONSTRATION DU THÉORÈME B′

Il est bien connu que $KO(CP^{2n})$ est un anneau de polynômes tronqués $Z[\omega]/(\omega^{n+1})$. Disposant lui aussi d'une démonstration depuis 1970, l'Auteur s'empresse de donner la forme explicite des opérations d'Adams [1]:

$$\psi^k(\omega) = \sum_{i \geq 1} \frac{k}{i}\binom{k+i-1}{2i-1}\omega^i.$$

On retiendra pour la suite que

$$\psi^3(\omega) = \omega(\omega+3)^2.$$

D'autre part, on vérifie aisément que

$$\nu_2(J_{2n}) = \nu_2(3^2-1) + \nu_2(3^4-1) + \cdots + \nu_2(3^{2n}-1).$$

On divise alors le groupe abélien libre à n générateurs $\tilde{KO}(CP^{2n})$ par les n relations $3^N(\psi^3(\omega^s) - \omega^s)$, avec $s = 1, 2, \cdots, n$, et N suffisamment grand. Le quotient obtenu a $J(CP^{2n})$ comme quotient, grâce à la conjecture d'Adams.

(1) Les initiés reconnaîtront une des séquelles du « théorème des carrés impairs », dont l'Auteur a mis au point une démonstration avec J.F. Adams au congrès de Nice 1970. Il semble indiqué de remarquer ici que, bien que longue, la liste des auteurs de démonstrations de ce théorème est disjointe de celle des auteurs de publications.

La matrice des relations est triangulaire, et donnée par

$$\alpha_{st} = 3^{N} \left(\binom{2s}{t-s} 3^{3s-t} - \delta_{st} \right);$$

son déterminant vaut

$$3^{nN} (3^2 - 1) (3^4 - 1) \cdots (3^{2n} - 1).$$

Grâce à l'observation ci-dessus, le quotient obtenu a donc même 2-composante que J (CP^{2n}). On remarque ensuite que si t est une puissance de 2, le coefficient α_{st} est *pair* pour tout s. Il en résulte que la matrice des relations a au moins [log 2 n/log 2] colonnes dont tous les éléments sont pairs. La 2-composante de J (CP^{2n}) a donc au moins [log 2 n/log 2] facteurs cycliques non-triviaux, grâce au Théorème des facteurs invariants. En appliquant le Théorème B, on a donc démontré le Théorème B'.

UNE REMARQUE SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI

On détermine J_{2n} en démontrant la formule [2]

$$J_{2n} = m(2) \times m(4) \times \cdots \times m(2n),$$

avec $m(2s)$ = ordre du groupe cyclique J (S^{4s}). On sait de plus que $m(2s)$ est le dénominateur de $B_{2s}/4s$, où B_{2s} désigne le nombre de Bernoulli habituel.

Le Théorème A' peut donc être considéré comme une description du comportement moyen de la fonction $m(2s)$, puisqu'il fournit

$$m(2) \times m(4) \times \cdots \times m(2n) \sim (2n)!\, e^{2Kn}.$$

RÉFÉRENCES

[1] J. F. ADAMS (1965) – *On the groups* J (X) II, « Topology », *3*, 137–171.
[2] J. F. ADAMS and G. WALKER (1965) – *On complex Stiefel manifolds*, « Proc. Cambridge Philos. Soc. », *61*, 81–103.
[3] U. SUTER – *On the groups* J (CP^n) *and* J (HP^n), « Bol. Soc. Brasil. Mat. » (à paraître).