
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

SUSANA ELENA TRIONE

Sopra un teorema d'intercambio

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 59 (1975), n.5, p. 357–361.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_5_357_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sopra un teorema d'intercambio.* Nota di SUSANA ELENA TRIONE, presentata (*) da Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Let $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $\alpha + \beta = n + 2h$, $\alpha \neq n + 2h$, $\beta \neq n + 2h$, $h = 0, 1, \dots$. We prove under these conditions, the formula of interchange of the Fourier transformation of convolution of $\text{Pf}(H_\alpha(P \pm i0, n) * H_\beta(P \pm i0, n))$ into the product of their Fourier transforms:

$$\{\text{Pf}(H_\alpha(P \pm i0, n) * H_\beta(P \pm i0, n))\}^\Lambda = \{H_\alpha(P \pm i0, n)\}^\Lambda \cdot \{H_\beta(P \pm i0, n)\}^\Lambda$$

(see, for the definitions of these notations, formulae (1), (1') and Theorem).

As an immediate consequence of formula (2) we obtain

$$\{\text{Pf}((P \pm i0, n)^{\frac{1}{2}t} * (P \pm i0, n)^{\frac{1}{2}s})\}^\Lambda = \{(P \pm i0, n)^{\frac{1}{2}t}\}^\Lambda \cdot \{(P \pm i0, n)^{\frac{1}{2}s}\}^\Lambda,$$

where $t + s = -n + 2h$, $t \neq 2h$, $s \neq 2h$, $h = 0, 1, 2, \dots$.

It may be observed that, in the particular case $p = n$, $q = 0$, the distributions $H_\alpha(P \pm i0, n)$ turn out to be the elliptic M. Riesz kernel of which they are "causal" ("anticausal") analogues; and from formula (18)), we arrive at $\{\text{Pf}(r^t * r^s)\}^\Lambda = \{r^t\}^\Lambda \{r^s\}^\Lambda$, which is valid for $t + s = -n + 2h$, $t \neq 2h$, $s \neq 2h$, $h = 0, 1, \dots$.

The last formula is an extension of formula (VII, 8; 8), p. 271, obtained by L. Schwartz (cf. [6]).

1. Consideriamo le distribuzioni

$$(I) \quad H_\alpha(P \pm i0, n) = \frac{(P \pm i0)^{\frac{1}{2}(\alpha-n)}}{Kn(\alpha, q)}$$

dove

$$P = P(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2,$$

$$p + q = n, \quad \alpha \in \mathbf{C}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad n \geq 2.$$

Abbiamo inoltre posto

$$(I') \quad Kn(\alpha, q) = \frac{\Pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{e^{\pm(\Pi/2)qi} \left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}$$

$$(P \pm i0)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{P \pm i\varepsilon |x|^2\}^\alpha, \quad \varepsilon > 0,$$

ove

$$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

e $(n - \alpha)/2$ è un intero positivo.

Le distribuzioni H_α sono un analogo «causale» («anticausale») del nucleo ellittico di Marcel Riesz (cfr. [1], p. 16).

(*) Nella seduta del 15 novembre 1975.

Scopo di questa Nota è la dimostrazione del seguente

TEOREMA. *Ipotesi:* $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $\alpha + \beta = n + 2h$, $\alpha \neq n + 2h$, $\beta \neq n + 2h$, $h = 0, 1, \dots$.

Tesi:

$$(2) \quad \{\text{Pf}(H_\alpha * H_\beta)\}^\Lambda = \{H_\alpha\}^\Lambda \{H_\beta\}^\Lambda.$$

Col simbolo $*$ denotiamo, come di consueto, la convoluzione, con Λ la trasformata di Fourier:

$$f(x)^\Lambda = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} f(y) dy$$

(quando f è una funzione), e $\text{Pf } H_\lambda$ è la parte finita di H_λ (formula (8)).

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che

$$(3) \quad \alpha = \alpha + 2h, \quad \beta = n - \alpha.$$

Dimostreremo la formula (2) per il caso particolare (3), ossia

$$(4) \quad \{\text{Pf}(H_{\alpha+2h} * H_{n-\alpha})\}^\Lambda = \{H_{\alpha+2h}\}^\Lambda \{H_{n-\alpha}\}^\Lambda.$$

Calcoleremo la convoluzione $H_{\alpha+2h} * H_{n-\alpha}$. Dalla formula (cfr. [5]); formula (II, 7; II))

$$(5) \quad H_\alpha * H_\beta = H_{\alpha+\beta}$$

valida per ogni $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ differenti da $n + 2r$, $r = 0, 1, \dots$, otteniamo

$$(6) \quad H_{\alpha+2h} * H_{n-\alpha} = H_{n+2h} = \frac{e^{\pm(\pi/2)qi} \Gamma(-h) (P \pm i0)^h}{\pi^{n/2} 2^{n+2h} \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)}.$$

Osserviamo che, a cagione della Γ che appare nel denominatore di (1'), H_α ha poli semplici nei punti $\alpha = n + 2h$, h intero ≥ 0 .

Sviluppiamo H_α in serie di Laurent nell'intorno del punto $\alpha = n + 2h$, $h = 0, 1, \dots$:

$$(7) \quad H_\alpha(P \pm i0, n) = \frac{A - 1}{\alpha - n - 2h} + A_0 + \sum_{v=1}^{\infty} A_v (\alpha - n - 2h)^v;$$

e poniamo, come di consueto,

$$(8) \quad \text{Pf } H_{n+2h} \stackrel{\text{def}}{=} A_0 = \lim_{\alpha \rightarrow n+2h} \frac{d}{d\alpha} \{(\alpha - n - 2h) H_\alpha\}.$$

Tenendo presente la formula (7), p. 144 (3), si ha

$$(9) \quad A_0 = \frac{(-1)^h e^{\pm(\Pi/2)qi} (P \pm io)^h}{\Pi^{(n/2)} 2^{n+2h+1}} \cdot \left\{ \frac{2 \log 2 \Gamma(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right) + \Gamma'(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right) + \Gamma'(h+1) \Gamma'\left(\frac{n+2h}{2}\right)}{\left\{ \Gamma(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right) \right\}^2} + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{h+1} 2 e^{\pm(\Pi/2)qi}}{\Pi^{n/2} 2^{n+2h} \Gamma(h+1) \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)} (P \pm io)^h \log(P \pm io) \right\}.$$

Applicando ai due membri della (9) la trasformazione di Fourier, dobbiamo calcolare le trasformate di Fourier di $(P \pm io)^h$ e di $(P \pm io)^h \log(P \pm io)$.

Se si tiene conto della formula (I, 1; 15) (cfr. [5] o formule (3), (3'), p. 284, [3], si ricava

$$(10) \quad \{(P \pm io)^n\}^\Lambda = \frac{e^{\mp(\Pi/2)qi} 2^{2h+n} \Pi^{n/2} \Gamma\left(h + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-h)} (Q \mp io)^{-h-\frac{1}{2}n}.$$

dove abbiamo posto

$$Q = Q(y) \stackrel{\text{def}}{=} y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2.$$

La trasformata di Fourier di $(P \pm io)^h \log(P \pm io)$ appare nella formula (I, 7), p. 252 [4]. Risulta

$$(11) \quad \{(P \pm io)^h \log(P \pm io)\}^\Lambda = \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + h\right) \Gamma(h+1)}{\Pi^{-(n/2)} 2^{-n-2h} e^{\mp(\Pi/2)qi} (-1)^{h+1}} \text{Pf}(Q \mp io)^{-\left(\frac{n+2h}{2}\right)} + \\ + (-1) \left[2 \log 2 + \frac{\Gamma'(h+1)}{\Gamma(h+1)} + \frac{\Gamma'\left(\frac{n}{2} + h\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + h\right)} \right] \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{2^{-n-2h} e^{\mp(\Pi/2)qi} \Pi^{-(n/2)} (-1)^h}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + h\right) h!} \{(Q \mp io)^h\}^\Lambda \right\}.$$

Sostituendo (10) in (11), concludiamo che

$$(12) \quad \{(P \pm io)^h \log(P \pm io)\}^\Lambda = \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + h\right) \Gamma(h+1) (-1)^{h+1}}{\Pi^{-(n/2)} 2^{-n-2h}} \text{Pf}(Q \mp io)^{-\frac{1}{2}(n+2h)} +$$

$$+ (-1) \left\{ 2 \log 2 + \frac{\Gamma'(\hbar+1)}{\Gamma(\hbar+1)} + \frac{\Gamma' \left(\frac{n+2\hbar}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{n+2\hbar}{2} \right)} \right\} \cdot \left\{ \frac{2^{n+2\hbar} \Pi^n \Gamma \left(\frac{n+2\hbar}{2} \right)}{\Pi^{n/2} \Gamma(-\hbar)} e^{\mp(\Pi/2)qi} \right\} (Q \mp i0)^{-\frac{1}{2}(n+2\hbar)}.$$

Finalmente, dopo calcoli lunghi ma elementari, che omettiamo, si giunge a

$$(13) \quad \{A_0\}^\Lambda = \text{Pf}(H_{\alpha+2\hbar} * H_{n-\alpha})^\Lambda = \text{Pf}(Q \mp i0)^{-\left(\frac{n+2\hbar}{2}\right)}.$$

Il calcolo della $\text{Pf}(Q \mp i0)^{-\frac{1}{2}(n+2\hbar)}$ si trova nella (1.7) [4].

D'altra parte (cfr. [5], formula (II, 7; 3), p. 34), sappiamo che

$$(14) \quad \{H_{\alpha+2\hbar}\}^\Lambda = (Q \mp i0)^{-\frac{1}{2}(\alpha+2\hbar)},$$

e

$$(15) \quad \{H_{n-\alpha}\}^\Lambda = (Q \mp i0)^{-\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}.$$

Ricordiamo la formula (II, 4; 2), p. 29 [5],

$$(16) \quad (Q \mp i0)^\lambda \cdot (Q \mp i0)^\mu = (Q \mp i0)^{\lambda+\mu},$$

che è valida per λ, μ complessi tali che $\lambda, \mu, \lambda + \mu$ non siano della forma $-(n/2) - k$, con k intero ≥ 0 .

Ci conviene osservare che $(Q \mp i0)^\lambda$ sono distribuzioni olomorfe di λ , salvo nei punti $\lambda = -(n/2) - r, r = 0, 1, \dots$, ove queste distribuzioni hanno poli semplici.

Daremo un senso al prodotto $(Q \mp i0)^\lambda \cdot (Q \mp i0)^\mu$, quando $\lambda, \mu \neq -(n/2) - r$, e $\lambda + \mu = -(n/2) - r, r = 0, 1, \dots$, calcolando $\text{Pf}(Q \mp i0)^\alpha$ nel punto $\alpha = -(n/2) - r, r = 0, 1, \dots$. In tal caso la formula (16) si scrive

$$(Q \mp i0)^\lambda \cdot (Q \mp i0)^\mu = \text{Pf}(Q \mp i0)^{\lambda+\mu},$$

$$\lambda, \mu \neq -(n/2) - r, \quad \lambda + \mu = -(n/2) - r, \quad r = 0, 1, \dots.$$

Da questo segue

$$\{H_{\alpha+2\hbar}\}^\Lambda \{H_{n-\alpha}\}^\Lambda = (Q \mp i0)^{-\frac{1}{2}(\alpha+2\hbar)} \cdot (Q \mp i0)^{-\frac{1}{2}(n+2\hbar)} = \text{Pf}(Q \mp i0)^{-\frac{1}{2}(n+2\hbar)}.$$

Le formule (13) e (17) mostrano che la (4) è effettivamente valida. Il caso più generale segue subito dalla (4), per $\alpha = 2\hbar = \alpha$ e $n - \alpha = \beta$, vale a dire

$$\{\text{Pf}(H_\alpha * H_\beta)\}^\Lambda = \{H_\alpha\}^\Lambda \{H_\beta\}^\Lambda,$$

ciò che prova il Teorema.

2. La formula (3) permette di ricavare la

$$(18) \quad \{Pf((P \mp i0)^{\frac{1}{2}t} * (P \mp i0)^{\frac{1}{2}s})\}^{\Lambda} = \{\{P \pm i0\}^{\frac{1}{2}t}\}^{\Lambda} \cdot \{\{P \mp i0\}^{\frac{1}{2}s}\}^{\Lambda},$$

che vale per $t + s = -n + 2h$, $t \neq 2h$, $s \neq 2h$, $h = 0, 1, \dots$. Nel caso particolare $q = 0$, $p = n$, la (1) prende la forma

$$(19) \quad H_{\alpha}(|x|^2, n) \stackrel{\text{def}}{=} R_{\alpha}(x, n) = \frac{r^{\alpha-n}}{Dn(\alpha)},$$

ove

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \quad Dn(\alpha) = \frac{\pi^{n/2} 2^{\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}.$$

La (19) è, precisamente, la definizione del nucleo ellittico di M. Riesz.

Pertanto, dalla (2) si ha

$$(20) \quad \{Pf(R_{\alpha} * R_{\beta})\}^{\Lambda} = \{R_{\alpha}\}^{\Lambda} \cdot \{R_{\beta}\}^{\Lambda}.$$

Dalla (20) scende anche, immediatamente, la relazione

$$(21) \quad \{Pf(r^t * r^s)\}^{\Lambda} = \{r^t\}^{\Lambda} \{r^s\}^{\Lambda},$$

valida per $t + s = -n + 2h$, $t \neq 2h$, $s \neq 2h$, $h = 0, 1, \dots$.

Notiamo finalmente che la equazione (21) generalizza la formula (VII, 8; 9), p. 271, [6] di L. Schwartz:

$$\{Pf r^p * Pf r^q\}^{\Lambda} = \{Pf r^p\}^{\Lambda} \{Pf r^q\}^{\Lambda},$$

valida per $\text{Re } p < -(n/2)$, $\text{Re } q < -(n/2)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. RIESZ (1949) - *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, « Acta Mathematica », 81, 1-223.
- [2] S. E. TRIONE (1974) - *Sopra alcune convoluzioni divergenti*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, 57 (3-4), 143-146.
- [3] I. M. GELFAND e G. E. SHILOV (1964) - *Generalized Functions*, Vol. I, Academic Press, New York.
- [4] S. E. TRIONE (1973) - *Sobre una fórmula de L. Schwartz*, « Revista de la Union Mat. Argentina », 26.
- [5] S. E. TRIONE (1972) - Tesis doctoral, « *Sobre soluciones elementales causales de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con coeficientes constantes* », F.C.E. y N., Universidad de Buenos Aires.
- [6] L. SCHWARTZ (1966) - *Théorie des Distributions*, Paris, Hermann.