Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Lacava

Teoria dei campi differenziali ordinati

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.5, p. 322–327.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_5_322_0>

Logica matematica. — *Teoria dei campi differenziali ordinati* (*).
Nota di FRANCESCO LACAVA, presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper we study the theory of ordered differential fields (CDO); in other words, the theory obtained adding the order axioms for a field to "differential field"'s axioms. If we consider a model K of such theory and we "forget" order, we know that such model is embedded in its differential closure. In a such closure, we can consider the set of real fields. Such a set has maximal elements (with respect to inclusion). We call CDO* the theory of so obtained maximal elements, for all $K \in \mathrm{Mod}\,(\mathrm{CDO})$.

If we neglect derivation, models of CDO* are real closed and then ordered. So we can prove that CDO* is the model completion of CDO. We find the axioms of CDO*, too. Finally, we find a method for eliminating quantifiers (for CDO*) in the formulas containing only inequalities.

1. Consideriamo il linguaggio L_F dei campi e « arricchiamolo » con un simbolo predicativo unario > 0 e con un simbolo di funzione unaria D. La teoria CDO avente per assiomi:

1) tutti gli assiomi della teoria F dei campi,

2) $(x > 0 \wedge y > 0) \rightarrow (x + y > 0)$

$(x > 0 \wedge y > 0) \rightarrow (xy > 0)$

$x > 0 \vee x = 0 \vee -x > 0$

$\neg (x > 0 \wedge -x > 0)$

3) $\mathrm{D}(x + y) = \mathrm{D}x + \mathrm{D}y$

$\mathrm{D}xy = y\mathrm{D}x + x\mathrm{D}y$

si chiama « teoria dei campi differenziali ordinati ». Modelli di tale teoria sono, ad esempio, i campi di Hardy (v. [1], [7]).

Siano $\Delta, \Delta', \Omega, \Omega'$, i funtori « dimenticanti » rispettivamente i primi due dell'operazione di derivazione e gli altri della relazione d'ordine. Così, ad esempio, Δ è il funtore che ad ogni oggetto della categoria Mod (CDO) $\mathscr{A} \equiv \langle A ; + , \cdot , - , ^{-1} , \mathrm{D} ; > 0 ; 0 , 1 \rangle$ associa l'oggetto $\Delta\mathscr{A} = \langle A ; + , \cdot , - , ^{-1} ; > 0 ; 0 , 1 \rangle$ della categoria dei campi ordinati e lascia invariati i

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 15 novembre 1975.

morfismi. Se indichiamo con OF, DF_0, F_0 rispettivamente le teorie dei campi ordinati, dei campi differenziali di caratteristica zero e dei campi di caratteristica zero, avremo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Mod}\,(\mathrm{OF}) \arrow[dr, "\Omega'"] & \\
\mathrm{Mod}\,(\mathrm{CDO}) \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Omega"'] & & \mathrm{Mod}\,(\mathrm{F}_0) \\
& \mathrm{Mod}\,(\mathrm{DF}_0) \arrow[ur, "\Delta'"'] &
\end{tikzcd}$$

Sia K un modello di CDO e sia $\overline{\mathrm{K}}$ la chiusura differenziale di ΩK. Consideriamo la famiglia $\mathscr{F}$ di tutti i campi differenziali e formalmente reali contenuti in $\overline{\mathrm{K}}$. Tale famiglia è non vuota perché $\mathrm{K} \in \mathscr{F}$ ed è ordinabile mediante la relazione di inclusione; ogni catena soddisfa alla condizione di Zorn e quindi esistono elementi massimali K^*. Indichiamo con CDO^* la teoria di tutti i K^* al variare di K.

LEMMA. *Sia $\mathscr{H}$ un campo differenziale e sia K una estensione algebrica di $\Delta'\mathscr{H}$. Allora si può definire in modo unico in* K *una operazione* D *di derivazione tale che la nuova struttura $\overline{K} = \langle \mathrm{K}\,;\,+\,,\,\cdot\,,\,-,\,^{-1},\,\mathrm{D}\,;\,0\,,\,1\rangle$ risulta essere una estensione di $\mathscr{H}$.*

Dimostrazione. Sia $\alpha \in K$ e sia $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \Delta'\mathscr{H}[x]$ il polinomio monico di grado minimo di cui α è radice. Allora $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-} + \cdots + a_1 = 0$; posto

$$\mathrm{D}\alpha = -\frac{a'_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a'_0}{n\alpha^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1}$$

si verifica immediatamente che D è una operazione di derivazione che estende quella definita in $\mathscr{H}$ ed è chiaramente unica.

PROPOSIZIONE 1. *Se* $\mathrm{K} \in \mathrm{Mod}\,(\mathrm{CDO})^*$ *allora* $\Delta\mathrm{K} \in \mathrm{Mod}\,(\mathrm{RCF})$.

Dimostrazione. Notiamo innanzi tutto che ogni $\Delta\mathrm{K}^*$, ove K^* è un elemento massimale dell'insieme definito sopra, è reale chiuso. Supponiamo infatti per assurdo che $\Delta\mathrm{K}^* \notin \mathrm{Mod}\,(\mathrm{RCF})$; esisterebbe allora una estensione algebrica $\hat{\mathrm{K}}^*$ di $\Delta\mathrm{K}^*$ formalmente reale. Ma per il lemma in $\hat{\mathrm{K}}^*$ si può definire una operazione di derivazione che estende quella di K^* e quindi $\hat{\mathrm{K}}^* \supset \mathrm{K}^*$ in contraddizione con la massimalità di K^*. Sia ora $\mathrm{K} \in \mathrm{Mod}\,(\mathrm{CDO}^*)$. Poiché ogni proprietà elementare che vale in ogni K^* vale in ogni modello di CDO^*, si ha immediatamente che $\Delta\mathrm{K} \in \mathrm{Mod}\,(\mathrm{RCF})$.

Sia $\mathscr{A} \in \mathrm{Mod}\,(\mathrm{CDO}^*)$; per la Proposizione 1 si può definire in modo unico in A una relazione d'ordine che lo renda un campo ordinato. La struttura così ampliata diviene allora un modello di CDO e quindi CDO^* può essere espressa nel linguaggio dei campi differenziali ordinati. Abbiamo allora il seguente risultato:

TEOREMA 1. CDO* *è il model completamente di* CDO

Dimostrazione. Per tale dimostrazione utilizzeremo il criterio di L. Blum (cfr. [8]). Chiaramente CDO è una teoria universale. Sia allora $K \in \mathrm{Mod}$ (CDO), $K(c) \in \mathrm{Mod}$ (CDO) una estensione semplice di K e $K^* \in \mathrm{Mod}$ (CDO*) estensione di K e $|K|^+$–saturato: bisogna dimostrare che il diagramma seguente può essere così completato:

$$\begin{tikzcd} & K^* & \\ K \arrow[ur] \arrow[rr] & & K(c) \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

Dobbiamo cioè trovare un elemento $c^* \in K^*$ tale che $K(c^*) \simeq K(c)$ su K.

Se c è differenziale algebrico, allora c^* esiste perché $K(c)$ è un campo differenziale ordinato contenuto nella chiusura differenziale di ΩK e quindi contenuto in ogni $K^* \in \mathrm{Mod}$ (CDO*) che estende K.

Sia c differenziale trascendente. Poiché $K(c)$ è ordinato, siano K_{i1} e K_{i2} $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ sottoinsiemi di K tali che $K_{i1} \cup K_{i2} = K$ e $k_{i1} < D^i c < k_{i2}$ per ogni $k_{i1} \in K_{i1}$ e $k_{i2} \in K_{i2}$. Sia S la collezione di formule:

1) $k_{i1} < D^i x < k_{i2}$, per ogni $k_{i1} \in K_{i1}$ e $k_{i2} \in K_{i2}$ e $i = 0, 1, 2, \cdots$

2) $f(x) \neq 0$, per tutti i polinomi differenziali $f(x)$ non identicamente nulli a coefficienti in K.

Indichiamo con $T(\langle K^*, k\rangle_{k \in K})$ la teoria, nel linguaggio arricchito di simboli di costanti $\{k\}_{k \in K}$, del campo K^* in cui siano stati privilegiati gli elementi di K.

La collezione S è consistente con $T(\langle K^*, k\rangle_{k \in K})$ poiché è tale ogni suo sottoinsieme finito. S può essere esteso ad un 1–tipo di $T(\langle K^*, k\rangle_{k \in K})$ e poiché K^* è $|K|^+$–saturato, S ha una realizzazione in K; se c^* è una tale realizzazione si ha che $K(c^*) \simeq K(c)$.

COROLLARIO 1. CDO* *ammette l'eliminazione dei quantificatori.*

Dimostrazione. È conseguenza di un risultato generale dovuto a A. Robinson (cfr. [8]).

Sia ora Γ la seguente successione di assiomi formulabili nel linguaggio dei campi differenziali ordinati:

1) gli assiomi di CDO;

2) per ogni $n > 0$ la formula:

$$\forall x_0 \cdots \forall x_{2n} \exists y \, (x_0 + x_1 y + \cdots + x_{2n} y^{2n} + y^{2n+1} = 0);$$

3) $\forall x \exists y \, (x = y^2 \vee -x = y^2)$;

4) $\forall y \exists x \, (D^n x = y)$;

5) per ogni x e per ogni polinomio differenziale $f(v)$ che non sia divisibile per un polinomio di ordine zero, $f(x) = 0$ implica che per ogni n–pla di polinomi differenziali $g_1(v), \cdots, g_n(v)$ con ord $g_i(v) <$ ord $f(v)$ e tali che $f(v)$ e $g_i(v)$ non hanno fattori comuni, se il sistema $g_1(v) > 0 \wedge \wedge g_2(v) > 0 \wedge \cdots \wedge g_{n-1}(v) > 0$ ammette soluzione allora il sistema $f(v) = 0 \wedge g_1(v) > 0 \wedge \cdots \wedge g_{n-1}(v) > 0 \wedge g_n(v) \neq 0$ ammette soluzione.

Sia T la teoria generata da tale sistema di assiomi. Allora:

TEOREMA 2. T *è il model completamento di* CDO.

Dimostrazione. Utiliziamo ancora il criterio di L. Blum (1). Siano $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}(b) \in \mathrm{Mod}\,(\mathrm{CDO})$ con $\mathscr{A}(b)$ estensione semplice di $\mathscr{A}$ e sia $\mathscr{A}^* \in \mathrm{Mod}\,(\mathrm{T})$ con $\mathscr{A}^*$ estensione di $\mathscr{A}$ e $|A|^+$–saturato. Dimostriamo che si può immergere $\mathscr{A}(b)$ in $\mathscr{A}^*$.

Se b è differenziale algebrico, allora sappiamo che esiste un polinomio differenziale $f(x)$ di ordine n di cui b è la radice generica. Poiché $\mathscr{A}(b)$ è ordinato esistono n coppie di sottoinsiemi di A, A_{i1} e A_{i2} $(i = 0, \cdots, n-1)$ tali che $A_{i1} \cup A_{i2} = A$ e $a_{i1} < D^i b < a_{i2}$ con $a_{i1} \in A_{i1}$, $a_{i2} \in A_{i2}$ per $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Sia Σ la seguente collezione di formule:

1) $f(x) = 0$

2) $a_{i1} < D^i x < a_{i2}$, con $a_{i1} \in A_{i1}$ e $a_{i2} \in A_{i2}$ $\quad i = 0, 1, \cdots, n-1$;

3) $g(x) \neq 0$ per ogni polinomio differenziale a coefficienti in A con ord $g(x) <$ ord $f(x)$.

Dimostriamo che ogni sottoinsieme finito di disequazioni di 2) ammette soluzione in un modello di T estensione di $\mathscr{A}$. Procediamo per induzione sull'ordine massimo i che compare nel sistema. Per $i = 0$ è banale. Supponiamo che sia vero per $i-1$. Siano $a_{ih} < D^i x < b_{ih}$ $h = 1, \cdots, k$ le disequazioni di ordine i che compaiono nel sistema dato. Sia a una soluzione del sistema $\bigwedge_{h=1}^{k} a_{ih} < y < b_{ih}$. Per l'assioma 4) $* D^i x = a$ ammette soluzione e quindi per l'assiona 5) e per l'ipotesi induttiva ammette soluzione il sistema costituito da $*$ e dalle disequazioni del sistema dato di ordine inferiore ad i. Tale soluzione soddisfa chiaramente il sistema dato. Allora Σ è consistente con $\mathrm{T}\,(\langle \mathscr{A}^*, a \rangle_{a \in A})$ perché ogni suo sottoinsieme finito è consistente. Quindi poiché $\mathscr{A}^*$ è $|A|^+$–saturato, Σ ammette una realizzazione in $\mathscr{A}^*$. Se $a^* \in \mathscr{A}^*$ è una tale realizzazione, allora $\mathscr{A}(a^*) \simeq \mathscr{A}(b)$.

Se b è differenziale trascendente si ripete un analogo ragionamento senza porre limitazioni ad i.

(1) È facile verificare che ogni modello di CDO è immergibile in un modello di T (v. anche Teorema 3).

2. Il Corollario 1 afferma che CDO ammette l'eliminazione dei quantificatori. Tale risultato, però, niente ci dice su come, data una formula, si possa giungere a quella equivalente priva di quantificatori. Un primo passo verso la risoluzione di tale problema è il seguente:

TEOREMA 3. *Sia* $K \in \mathrm{Mod}(\mathrm{CDO})^*$. *Sia* α *una formula del tipo* $\exists x (g_1(x) > 0 \wedge \cdots \wedge g_n(x) > 0)$ *e sia* γ *una formula del tipo* $\exists x (g_1(x) = 0 \wedge \wedge \cdots \wedge g_n(x) = 0)$ *con* $g_i(x)$ *polinomi differenziali a coefficienti in* K. *Allora esiste un procedimento effettivo di eliminazione dei quantificatori per tali formule.*

Dimostrazione. Per le formule di tipo γ vedi A. Seidenberg [9]. Sia $r > 0$ l'ordine massimo dei polinomi $g_i(x)$ che compaiono in α. Parallelamente al sistema dato, consideriamo il sistema

$$\psi : \bar{g}_1(x_0, \cdots, x_r) > 0 \wedge \cdots \wedge \bar{g}_n(x_0, \cdots, x_r) > 0$$

ottenuto da quello dato ponendo $D^j x = x_j$.

Consideriamo la formula

$$\alpha^* = \exists x_0 \exists x_1 \cdots \exists x_r (\bar{g}_1(x_0, \cdots, x_r) > 0 \wedge \cdots \wedge \bar{g}_n(x_0, \cdots, x_r) > 0);$$

poiché tale enunciato è formulato nel linguaggio dei campi ordinati, sappiamo che in un campo reale chiuso è equivalente ad una formula $\bar{\alpha}$ priva di quantificatori. Vogliamo far vedere che α è equivalente ad $\bar{\alpha}$ sotto $\mathrm{CDO}^* \cup \mathscr{D}(K)$. A tale scopo basterà far vedere che esiste un ampliamento di K in cui $D^j x_0 = x_j$ e con $x_0, \cdots, x_r$ soddisfacenti α^*. Consideriamo la formula

$$\beta = \exists x_{01} \exists x_{02} \exists x_{11} \exists x_{12} \cdots \exists x_{r1} \exists x_{r2} \forall x_0 \forall x_1 \cdots$$

$$\cdots \forall x_r (x_{01} < x_0 < x_{02} \wedge \cdots \wedge x_{r1} < x_r < x_{r2} \rightarrow \psi).$$

In **R** è vera la formula $\varphi = \alpha^* \rightarrow \beta$ e quindi φ è vera in ogni campo reale chiuso. φ è quindi vera anche in K (v. Propos. 1). Siano $\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02}, \cdots, \bar{x}_{r1}, \bar{x}_{r2}$ le realizzazioni di $x_{01}, \cdots, x_{r2}$ in K. Siano $u_0, \cdots, u_r$ elementi algebricamente liberi su K; consideriamo l'ampliamento trascendente $H = K(u_0, \cdots, u_r)$ e poniamo

$$Du_0 = u_1, D^2 u_0 = u_2, \cdots, D^r u_0 = u_r \quad \text{e} \quad \bar{x}_{01} < u_0 < \bar{x}_{02}, \cdots, \bar{x}_{r1} < u_r < \bar{x}_{r2}.$$

Sia $\overline{H}$ la chiusura reale di H. In $\overline{H}\,\alpha$ è soddisfatta da $u_0, \cdots, u_r$. Infatti in caso contrario sarebbe $g_i(u_0) < 0$ per qualche i; ma allora $\bar{g}_i(u_0, \cdots, u_r) < 0$. Poiché, d'altra parte, si è supposto che valga α^*, esistono $\bar{u}_0, \cdots, \bar{u}_r$ elementi di $\overline{H}$ tali che $\bar{g}_i(\bar{u}_0, \cdots, \bar{u}_r) = 0$ con $\bar{x}_{01} < \bar{u}_0 < \bar{x}_{02} \cdots, \bar{x}_{r1} < \bar{u}_r < \bar{x}_{r2}$, ma ciò è assurdo per β e perché $u_0, \cdots, u_r$ sono algebricamente liberi.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI (1951) – *Elements de mathématique*, *12*, 107. Paris.

[2] P. J. COHEN (1969) – *Decision procedures for real and p–adic fields*. Communications on « Pure and Applied Mathematics », *22*.

[3] I. KAPLANSKI (1957) – *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris.

[4] P. MANGANI (1972–73) – *Geometria algebrica*, Dispense, Firenze.

[5] J. F. RITT (1950) – *Differential algebra*, New York.

[6] A. ROBINSON (1965) – *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, North–Holland, Publ. Co.

[7] A. ROBINSON (1972) – *On the real closure of a Hardy field*, Theory of sets and topology, Berlin.

[8] G. SACKS (1972) – *Saturated model theory*, Benjamin.

[9] A. SEIDENBERG (1956) – *An elimination theory for differential algebra*, University of California, Publication in Mathematics.

[10] A. SEIDENBERG – *Some basic theorems in differential algebra*, « Transactions of the American Mathematical Society », *73*, 174–190.

[11] A. TARSKI (1951) – *A decision method for elementary algebra and geometry*, Berkeley and Los Angeles,