Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Piero Bassanini

Sul tempo di esistenza di soluzioni regolari di un sistema iperbolico quasilineare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.3-4, p. 258–262.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_3-4_258_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Fisica matematica. — *Sul tempo di esistenza di soluzioni regolari di un sistema iperbolico quasilineare* (*). Nota (**) di Piero Bassanini, presentata dal Socio D. Graffi.

Summary. — A comparison is given of the estimates of the existence times of "smooth" solutions of a quasilinear hyperbolic system in the Courant–Lax canonic form, following a suitably modified version of Cesari's [2] and Borovikov's [6] theories. The results can be applied to the dynamics of inviscid compressible fluids.

1. Introduzione

Consideriamo il sistema iperbolico quasilineare nella forma canonica di Courant–Lax:

$$\partial z_i/\partial x + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(z)\, \partial z_i/\partial y_k = f_i(z) \tag{1}$$

$$x \in E^1, y = (y_1, \cdots, y_r) \in E^r, \qquad r \geq 1, i = 1, \cdots, m$$

dove $z = (z_1, \cdots, z_m) = z(x, y)$ è la funzione vettoriale incognita, $\rho_{ik}(z)$ ed $f_i(z)$, $z \in E^m$, $k = 1, \cdots, r$ sono funzioni assegnate, con le condizioni iniziali (per $x = 0$):

$$z_i(0, y) = \varphi_i(y) \quad , \quad y \in E^r, \qquad i = 1, \cdots, m, \tag{2}$$

in uno strato sottile $D_a = I_a \times E^r = \{(x, y): 0 \leq x \leq a, y \in E^r, a > 0\}$ dello spazio E^{r+1}. Denotiamo con $\varphi = \varphi(y) = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ il dato iniziale assegnato. Interesserà in particolare (cfr. n. 3) il caso in cui $m = 2, r = 1$ e $f_i(z) = 0$.

In alcuni recentissimi lavori, L. Cesari [1–5] ha dimostrato teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua (dai dati) in D_a, sotto opportune restrizioni per a, per una classe di problemi ai limiti relativi a sistemi iperbolici quasilineari (con funzioni ρ_{ik} ed f_i dipendenti anche da x ed y) che include anche il problema di Cauchy (1)+(2). Nel caso particolare di sistemi della forma (1) qui considerati, l'enunciato del teorema di Cesari [2] si semplifica e le stime (maggiorazioni) per a possono essere raffinate. Tale raffinamento è esposto nel n. 2.

Nel n. 3 si considera il problema di Cauchy per $m = 2, r = 1, f_i(z) = 0$, e cioè per sistemi omogenei di due equazioni in due variabili indipendenti,

(*) Ricerca svolta nell'ambito dell'attività del GNFM del CNR.

(**) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1975.

nella forma canonica di Courant–Lax. Siffatto problema è stato studiato recentemente da V. A. Borovikov [6], che si riallaccia a ricerche di Glimm e Lax [7]. Si tratta di sistemi *strettamente iperbolici*, cioè con due famiglie reali e distinte di linee caratteristiche (« velocità caratteristiche » ρ_1 e ρ_2), dipendenti dalla funzione incognita z.

Scopo principale di questa Nota è di confrontare le stime del tempo di esistenza di una soluzione « regolare » (cioè *non* di « shock » [8], come chiarito in modo preciso nel n. 3) ottenute seguendo l'ordine di idee di Cesari, cioè facendo uso dei risultati esposti nel n. 2, e di Borovikov [6]. Si verifica così che la stima del tempo di esistenza di una soluzione « regolare » nel senso di Cesari (1) risulta inferiore alla stima del tempo di esistenza di una soluzione regolare nel senso di Borovikov (2), e se ne fornisce una maggiorazione del rapporto. Tale confronto può essere non privo di interesse, in vista di applicazioni dei teoremi di Cesari a problemi di Fisica Matematica.

2. Raffinamento delle stime di Cesari per il problema di Cauchy

Si denota con $|y| = \max_k |y_k|$ e con $|z| = \max_i |z_i|$ norme vettoriali di y e z in E^r ed E^m, rispettivamente, e si considera il problema di Cauchy (1)+ +(2). L'enunciato del corrispondente Teorema di Cesari [2] si può allora semplificare e le stime per a raffinare come segue. Siano M, N, L, L_1 numeri reali non negativi, e siano ω, Ω, $\Lambda > 0$ numeri reali assegnati, $0 < \omega < \Omega$. Denoteremo con Ω anche l'intervallo $[-\Omega, \Omega]^m \subset E^m$, e scriveremo $M_a = Ma$, $N_a = Na$, $L_a = La$ e $L_{1a} = L_1 a$. Scegliamo costanti p, Q, k soddisfacenti a $0 < p < 1$, $Q > (1+p)\Lambda$, $0 < k < 1$, e per il resto arbitrarie, e denotiamo con λ la costante $(1 - L_a Q)^{-1}$. Poniamo infine $\Xi = N + R_3 M$, con $R_3 \geq \Lambda\lambda + QL_{1a}\lambda$.

Assumiamo a abbastanza piccolo, cosicché valgano le seguenti quattro disequazioni:

$$(3)\quad \begin{cases} (a_1)\ \ LaQ(1+p) \leq p\,; & (a_2)\ \ \omega + Na \leq \Omega\,; \\ (a_3)\ \ L_1 aQ(1+p) \leq Q - \Lambda(1+p)\,; & (a_4)\ \ L_1 a + La\lambda(\Lambda + L_1 aQ) \leq k. \end{cases}$$

Le (3) costituiscono un raffinamento delle corrispondenti stime di a, date in [2], e l'enunciato del teorema di Cesari [2] per il problema di Cauchy (1)+ +(2) si riduce alla seguente proposizione:

TEOREMA 1. *Siano* $\rho_{ik}(z)$ *e* $f_i(z)$, $i = 1, \cdots, m$, $k = 1, \cdots, r$, *funzioni assegnate, definite in* Ω, *limitate e (uniformemente) Lipschitziane in* Ω,

(1) Si tratta sostanzialmente di soluzioni di « *classe* G », o in *senso generalizzato* (cfr. [2], [9], [10]), e la stima di a è *per difetto*.

(2) Si tratta di soluzioni regolari *in senso classico*, e la stima di a è *per eccesso*.

con costanti M , N , L *ed* L_1:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&|\rho_{ik}(z)| \leq \mathrm{M}\,, \ |f_i(z)| \leq \mathrm{N}\\
&|\rho_{ik}(z) - \rho_{ik}(\bar z)| \leq \mathrm{L}\,|z - \bar z|\\
&|f_i(z) - f_i(\bar z)| \leq \mathrm{L}_1\,|z - \bar z|
\end{aligned}
$$

per ogni $z\,,\bar z \in \Omega \subset \mathrm{E}^m$. *Sia* $\varphi(y)$ *una assegnata funzione vettoriale definita in* E^r, *limitata e Lipschitziana in* E^r, *con costanti* ω *e* Λ,

$$
(5)\qquad |\varphi_i(y)| \leq \omega\,, \qquad |\varphi_i(y) - \varphi_i(\bar y)| \leq \Lambda\,|y - \bar y|\,, \qquad i = 1\,,\cdots,m.
$$

Allora esiste un numero $a > 0$ tale da soddisfare le disequazioni (a_1)-(a_4), ed esiste una funzione vettoriale $z(x\,,y)$, limitata ed (uniformemente) Lipschitziana in D_a:

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&|z_i(x\,,y)| \leq \Omega\,;\ |z_i(x\,,y) - z_i(\bar x\,,y)| \leq \Xi\,|x - \bar x|\,; \qquad i = 1\,,\cdots,m\\
&|z_i(x\,,y) - z_i(x\,,\bar y)| \leq \mathrm{Q}\,|y - \bar y| \quad ; \quad (x\,,y)\,,(\bar x\,,y)\,,(x\,,\bar y) \in \mathrm{D}_a
\end{aligned}
$$

che soddisfa il sistema (1) q.o. in D_a, le condizioni iniziali (2) ovunque in E^r. Inoltre, la soluzione z è *unica* e dipende con continuità da φ (nel senso della topologia uniforme [2]).

3. Teoremi di esistenza e stime di a

Consideriamo ora il caso particolare del sistema (1) ottenuto ponendo ivi $m = 2\,, r = 1\,, f_i(z) = 0$ e $\rho_{i1}(z) = \rho_i(z)\ (i = 1\,,2)$, sostituendo poi x con t e y_1 con x. Le disequazioni (a_1)-(a_4) della (3) si riducono allora, come si verifica facilmente, alla

$$
(7)\qquad a < \bar a = (4\,\Lambda\mathrm{L})^{-1}.
$$

Le ipotesi del Teorema 1 si possono sostanzialmente ridurre ora alle due seguenti:

(C 1) $\varphi_i(x)\,, x \in \mathrm{E}^1$, sono funzioni limitate e (uniformemente) Lipschitziane in E^1, con costanti ω e $\Lambda\ (0 < \omega < \Omega)$:

$$
|\varphi_i(x)| \leq \omega\ |\varphi_i(x) - \varphi_i(\bar x)| \leq \Lambda\,|x - \bar x|\,, \qquad i = 1\,,2
$$

(C 2) $\rho_i(z)\,, z \in \Omega$, sono funzioni limitate e (uniformemente) Lipschitziane in Ω, con costanti M ed L, conformemente alla (4).

Il Teorema 1 si riduce ora alla seguente proposizione:

Teorema 2. *Sotto le ipotesi* (C1) *e* (C2) *esiste ed è unica la funzione vettoriale* $z(t\,,x)$, *limitata ed (uniformemente) Lipschitziana in* D_a, *che soddisfa il sistema differenziale q.o. in* D_a *e le condizioni iniziali ovunque in* E^1, *per ogni* $a < \bar a$. *Inoltre la soluzione* z *dipende con continuità dal dato iniziale* φ.

Segue che, se si chiama soluzione « G–regolare » la soluzione z di cui all'enunciato del Teorema 2, tale soluzione esiste ed è unica in D_a se

$$a < \bar{a} = (4\,\Lambda L)^{-1}. \tag{8}$$

La (8) fornisce pertanto una stima (per difetto) del *tempo di esistenza* di una soluzione G–*regolare* del problema di Cauchy considerato.

Si noti infine che, con facile verifica, le costanti (di Lipschitz) Ξ e Q possono assumersi pari a $\Xi = 2\,\Lambda M$ e $Q = 2\Lambda$.

Il problema di Cauchy qui considerato è stato recentemente studiato da Borovikov [6] sotto le seguenti ipotesi:

(B 1) $\varphi_i(x) \in C^1(E^1)$, $i = 1, 2$; $\omega_1 < \varphi_2(x) < \omega_2$

(B 2) $\rho_i(z) \in C^1(E^2)$, $i = 1, 2$, (ω_1 e ω_2 costanti)

(B 3) esiste almeno un $x \in E^1$ tale che $d\varphi_1/dx < 0$

(B 4) $\rho_1(z) - \rho_2(z) > 0$; $\partial\rho_1/\partial z_1 > 0$.

Osserviamo che, mentre la condizione $\partial\rho_1/\partial z_1 \neq 0$ equivale alla seconda delle (B 4), è omessa qui la « condizione di Lax » (completa) che richiederebbe anche $\partial\rho_2/\partial z_2 \neq 0$ [7]. Per soluzione « regolare » Borovikov intende una soluzione *regolare in senso classico* [6]. Il teorema dimostrato in [6] si enuncia allora come segue:

TEOREMA 3. *Sotto le ipotesi* (B 1)–(B 4), *la soluzione regolare del problema di Cauchy considerato non esiste per* $a \geq T$, *con*

$$T = \min_{x \in E} \left[|d\varphi_1/dx| (\rho_1 - \rho_2) \min_{\varphi_2} \{\partial\rho_1/\partial\varphi_1 (\rho_1 - \rho_2)^{-1} \exp(U)\}\right]^{-1} \tag{9}$$

dove il secondo minimo (rispetto a φ_2*) è preso sull'intervallo* $[\omega_1, \omega_2]$, *mentre il minimo su* x *è preso sul sottoinsieme* $E \subset E^1$ *(non vuoto per la* (B3)), *dove* $d\varphi_1/dx < 0$ [6]. *Si è posto*

$$U = U(x, \varphi_2) = \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_2} d\varphi_2 \{ \partial\rho_2/\partial\varphi_2 [\rho_2 - \rho_1]^{-1} \} \tag{10}$$

e, nelle (9) *e* (10), *si intende* $\rho_i = \rho_i(x) = \rho_i(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$, *con* $i = 1, 2$.

Il Teorema 3 fornisce quindi una condizione *necessaria* per l'esistenza di una soluzione *regolare* in D_a, dovendo risultare

$$a < T. \tag{11}$$

La (11) dà quindi un confine superiore per il *tempo di esistenza* di una soluzione *regolare* (in senso classico) del problema di Cauchy considerato.

Sotto le ipotesi (B1)–(B4), (C1) e (C2) dalle (9) e (10) segue:

$$T \geq \min_{x\in E} \left[\Lambda L \left\{ \min_{\varphi_2} \left[\exp(U)\right]\right\}\right]^{-1} \geq (\Lambda L)^{-1} = 4\,\bar{a} \tag{12}$$

donde una maggiorazione per il rapporto $(\bar{a}/T) : (\bar{a}/T) \leq 1/4$ (3).

I risultati ottenuti si possono immediatamente applicare al sistema di Euler delle equazioni del flusso isoentropico unidimensionale (in assenza di forze esterne e scambi di calore) per un fluido comprimibile politropico perfetto. È immediato infatti verificare che le ipotesi (B 2), (B 4) e (C 2) sono soddisfatte. Si possono allora dedurre stime relative ai tempi di esistenza di soluzioni « regolari » in dipendenza dalla classe funzionale del dato iniziale φ, e quindi stime relative al tempo necessario alla formazione di un'*onda d'urto* nel fluido.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. CESARI (1974) – *Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari alle derivate parziali*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », *56* (1).

[2] L. CESARI – *A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems*, « Rivista Mat. Univ. Parma », in corso di stampa.

[3] L. CESARI (1974) – *Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari nella forma canonica di Schauder*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », 57, *5*.

[4] L. CESARI (1974) – *A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in the Schauder canonic form*, « Annali Scuola Norm. Sup. Pisa », ser. 4, *1* (3–4).

[5] L. CESARI – *Oscillazioni non lineari per sistemi iperbolici*, « Rend. Sem. Mat. Fis. Univ. Milano », in corso di stampa.

[6] V. A. BOROVIKOV (1971) – *An upper bound for the existence time of the smooth solution of a quasilinear hyperbolic system*, « Soviet Math. Doklady », *12* (6).

[7] J. GLIMM e P. D. LAX (1970) – *Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, « Mem. Amer. Math. Soc. », *101*.

[8] R. COURANT e D. HILBERT (1965) – *Methods of mathematical physics*, *2*, Interscience, New York.

[9] M. CINQUINI–CIBRARIO (1962) – *Un teorema di esistenza per sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, « Rend. Ist. Lombardo », A, 96.

[10] M. CINQUINI–CIBRARIO (1962–63) – *Sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti*, « Sem. Ist. Naz. Alta Mat. ».

(3) Denotando con a' la stima fornita in [10], si ha $a' = (L^{-1}) \ln [1 + (2\Lambda)^{-1}]$.