Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

André Batbedat

Prealgèbres contenant un idempotent associatif

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.3-4, p. 224–228.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_3-4_224_0>

Algebra. — *Préalgèbres contenant un idempotent associatif.* Nota II (*) di ANDRE BATBEDAT, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

RIASSUNTO. — Si applicano i risultati di (3) alle prealgebre dotate di un idempotente associativo e si determina la struttura di queste ultime. Le proprietà qui esposte generalizzano quelle presentate in (1) e (2) per i preanelli idempotenti.

INTRODUCTION

Cette note fait suite à celle intitulée: Préalgèbres, biunalgèbres et unalgèbres (3). Nous précisons la structure des préalgèbres munies d'un idempotent associatif en appliquant le Théorème III.5 et la Proposition IV.2 de (3).

Les résultats obtenus permettent de retrouver les propriétés des préanneaux idempotents ((1) et (2)) et plus généralement d'envisager l'étude des préanneaux d'ordere n ($x^{n+1} = x$ pour tout x); ils conduisent à l'équivalence de la catégorie des espaces affines avec la catégorie des préanneaux associatifs, unitaires, contenant des zéros à droite; ils ouvrent la voie à une théorie spectrale pour certaines classes de préanneaux...

I. IDEMPOTENT D-ASSOCIATIF

Pour cette note P est une préalgèbre (voir (1), Chapitre I et (3), Chapitre I) non nécessairement associative et p est un idempotent de P. Le foncteur pointant ((3), Chapitre III) associe à (P, p) la biunalgèbre (Q ,′,″) où Q est l'algèbre P_p , $a' = ap$ et $a'' = pa$ (produits sur P).

Dans ce Chapitre p est de plus d-associatif ((3), Chapitre IV) d'où il résulte ((3), Proposition IV.2) que prime est un projecteur du module Q, commute avec seconde et vérifie: $(a \times b)' = a \times b'$ (produits sur Q); alors:

LEMME I.1. *Le noyau* N *et l'image* I *de prime sont stables pour prime, seconde et l'action produit à gauche sur* Q; *prime est l'application nulle* [*resp. identique*] *sur* N [*resp.* I]; N *et* I *déterminent des sous-biunalgèbres de* (Q , ′ , ″).

Prime étant un projecteur, le module Q est la somme directe des modules I et N; de plus prime et seconde se transmettent par composantes.

Soit (H , p) [resp. (L , p)] l'image de I [resp. N] par le foncteur dilatant ((3), Chapitre II): H [resp. L] est l'ensemble des pa [resp. $a \vee p = a + p - ap$ (disjonction)] pour a parcourant P; c'est une sous-préalgèbre de P pour laquelle p est neutre [resp. zéro] à droite (Lemme I.1).

(*) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1975.

P n'est pas en général le produit de H par L car la détermination de la loi binaire de P fait intervenir non seulement les lois binaires sur H et L mais aussi des actions mutuelles...

LEMME I.2, *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) *Pour tous* $x \in \mathrm{I}$, $u \in \mathrm{N} : x \times u = p$;

ii) *Pour tout* $a \in \mathrm{Q} : a' \times a = a' \times a' = a \times a'$;

iii) *Pour tout* $a \in \mathrm{P} : (ap)\, a = aap - pap + pa$ *et* $(ap)ap = aap$;

iv) *Pour tout* $a \in \mathrm{P} : (ap)\, a = aap - pap + pa$.

Preuve. Pour chaque couple $(x\,, u)$ il existe un unique a pour lequel: $a' = u$ et $a \ominus a' = x$...

La condition i) de ce lemme est nécessaire et suffisante pour que la biunalgèbre $(\mathrm{Q}\,,',")$ soit le produit des biunalgèbres définies par I et N.

On note (C1) la condition iv) de ce lemme.

THÉORÈME I.3. *Soit* P *une préalgèbre avec l'idempotent d–associatif* p: *la condition* (C1) *est nécessaire et suffisante pour que* H *soit le produit de la sous-préalgèbre* F *des* ap *par la sous-préalgèbre* L *des* $a \vee p$.

Réciproquement le produit d'une préalgèbre avec h zéro à droite par une préalgèbre avec k neutre à droite est une préalgèbre pour laquelle $(h\,, k)$ est idempotent et vérifie (C1).

II. ZÉRO À DROITE ASSOCIATIF

Par la méthode du Chapitre précédent, mais avec seconde à la place de prime:

THÉORÈME II.1. *Si* p *est zéro à droite associatif dans la préalgèbre* P *et vérifie*: $paa = pa$, P *est isomorphe au produit de l'algèbre* J *des* $p \vee a$ *par la préalgèbre zéro à droite* D ($uv = v$, *voir* (1)) *des zéros à droite de* P (*ensemble des* pa).

L'oubli de la condition: $paa = pa$ fait intervenir la définition suivante: soit G une algèbre, M un module sur le même anneau π et $*$ une action de G sur $\mathrm{M} : (u\,, x) \in \mathrm{M} \times \mathrm{G} \mapsto u * x \in \mathrm{M}$. M est un *G–module généralisé* si pour tous $u\,, v$ de M, x, y de G et α de $\pi : (u \oplus v) * x = u * x \oplus v * x\,;\, u * (x \oplus y) = u * x \oplus u * y\,;\, (u * x)\, \alpha = u * (x\alpha) = (u\alpha) * x$.

Soit m [resp. g] le zéro de M [resp. G]; l'espace affine produit $\mathrm{M} \times \mathrm{G}$ avec la loi binaire:

$$(\mathrm{BZ}) : (u\,, x)\, (v\,, y) = (v \oplus u * y\,, xy),$$

est une préalgèbre pour laquelle $(m\,, g)$ est zéro à droite associatif.

THÉORÈME II.2. *Soit* P *une préalgèbre avec* p *zéro à droite associatif,* J *l'algebre des* $p \vee a$ *et* D *le module pointé en* p *des zéros à droite de* P : D *est un* J*–module généralisé pour l'action produit à droite dans* P *et* P *est isomorphe à l'espace affine produit* $D \times J$ *avec la loi binaire* (BZ).

Soit s un autre zéro à droite associatif; l'application: $x \mapsto s \vee x$, de J dans l'algèbre des $s \vee a$ est un isomorphisme d'où il résulte que *la structure de l'algèbre* J *est indépendante du choix de* p *dans* D.

Lorsque P est un préanneau associatif unitaire, J est un anneau associatif unitaire et D pointé en p est un J-module. Dans ce cas particulier la décomposition précédente nous a permis d'établir (4) que *la catégorie des espaces affines est équivalente à la catégorie des préanneaux associatifs unitaires avec des zéros à droite.*

III. Neutre à droite associatif

Grâce à la dualité (pour la disjonction) on peut transposer les résultats précédents au cas où p est neutre à droite...

THÉORÈME III.1. *Si* p *est neutre à droite dans la préalgèbre* P *et vérifie* $paa = aa - a + pa$, P *est isomorphe au produit de la préalgèbre unitaire* K *des* pa *par la préalgèbre neutre à droite* E ($uv = u$) *des neutres à droite de* P (*ensemble des* $p \vee a$).

IV. Idempotent associatif

Maintenant p est indempotent associatif: le module Q est somme directe des modules I et N (Chapitre I). La structure de la préalgèbre L pour laquelle p est zéro à droite est définie par le Théorème II.2 et celle de H est duale, Ainsi Q est somme directe de quatre modules et la loi binaire sur P est déterminée à partir de certaines lois binaires composantes et d'actions mutuelles...

Sous la condition (C1), P est isomorphe au produit $L \times H$ (Théorème I.3); sous la condition (C2): $papap = papa - paa + paap$, L est isomorphe au produit de l'algèbre J des $p \vee a \vee p$ par la préalgèbre zéro à droite D des $pa \vee p$ (Théorème II.1); sous la condition (C3): $papap = apap - ap + pap$, H est isomorphe au produit de la préalgèbre unitaire K des pap par la préalgèbre neutre à droite E des $p \vee ap$ (Théorème III.1).

LEMME IV.1. *La conjonction de* (C1), (C2) *et* (C3) *est équivalente à* (C1) *et* (C4): $paa = aap - ap + pa$.

THÉORÈME IV.2. *Une préalgèbre est isomorphe au produit constitué par: une algèbre, une préalgèbre unitaire, une préalgèbre zéro à droite et une préalgèbre neutre à droite, si et seulement si elle contient un idempotent associatif vérifiant* (C1) *et* (C4).

Lorsque P est idempotent, (C4) est trivialement satisfaite; on vérifie (C1) en élevant au carré. Ceci donne *une nouvelle démonstration du Théorème* III.5 *de* (1) et sous l'hypothèse plus faible de l'existence d'un élément associatif.

V. PRÉALGÈBRES FORTES

DÉFINITION V.1. *Une préalgèbre est* forte *si elle contient un idempotent associatif et central.*

Si p est associatif et central, l'image de (P, p) par le foncteur pointant est la unalgèbre $(Q, ')$ pour laquelle prime est un endomorphisme idempotent vérifiant: $a' \times a = a' \times a' = a \times a'$, pour tout a.

THÉORÈME V.2. *Une préalgèbre est isomorphe au produit d'une algèbre par préalgèbre unitaire si et seulement si elle est forte.*

P. Janin a établi ce résultat pour les préanneaux associatifs ((6), Proposition 25).

Avec les notations du Chapitre IV, lorsque p est central H s'identifie à K, L s'identifie à J, $D = E = \{p\}$, les conditions (C1) et (C4) sont satisfaites et P est isomorphe au produit $J \times K$.

PROPOSITION V.3. *Soit* P *une préalgèbre avec* p *idempotent, associatif, vérifiant* (C1) *et* (C4): *s'il existe dans* P *un élément* c *central, alors:*

i) *Pour la décomposition du Chapitre IV*: $D = E = \{ p \}$;

ii) p *est central*;

iii) P *est forte.*

Ainsi pour une préalgèbre forte la propriété: $D = E = \{ p \}$, est indépendante du choix de p; ceci sera précisé au chapitre suivant.

Soit P un préanneau associatif fort: les idempotents centraux de J [resp. K] constituent un anneau booleen [resp. un préanneau booleen unitaire (2)]. On en déduit *l'existence d'un foncteur naturel de la catégorie des préanneaux associatifs forts avec les morphismes respectant les idempotents centraux vers la catégorie des préanneaux booleens.* La Proposition V.3 montre que les idempotents centraux de P sont exactement les idempotents vérifiant (C1) et (C4).

DÉFINITION V.4. *Un préanneau est* d'ordre n *si* $a^{n+1} = a$ *pour tout* a; *il est* à duordre n si *son dual est d'ordre* n.

Un $(n+1)$*-préanneau* au sens de P. Janin ((6), Définition 41) est un préanneau à la fois d'ordre n et à duordre n. Tout préanneau idempotent est un 2–préanneau ce qui montre l'existence de $(n+1)$–préanneaux associatifs et non commutatifs; cependant on voit facilement que tout $(n+1)$–préanneau associatif contenant un élément central est commutatif.

Tout *préanneau associatif fort d'ordre n* est isomorphe au produit d'un anneau associatif (commutatif) d'ordre n par un préanneau associatif unitaire (non nécessairement commutatif) d'ordre n (Théorème V.2): ses propriétés relèvent donc de la théorie des *anneaux d'ordre n* qui est bien connue (voir par exemple (5)) et de celle des *anneaux à duordre n* qui l'est beaucoup moins...

Comme autre application du Théorème V.2, indiquons succintement que l'image d'un idéal par dualité est un filtre (6): ceci permettrait d'élaborer une théorie spectrale pour certaines classes de préanneaux forts...

VI. Decomposition canonique

Soit P une préalgèbre avec p idempotent associatif vérifiant les conditions (C1) et (C4) (Chapitre IV), U la préalgèbre $J \times K$ (ensemble des $a_1 = p \vee a \vee p \oplus pap$) et V la préalgèbre $D \times E$ (ensemble des $a_2 = pa \vee p \oplus p \vee ap$). U est une préalgèbre forte (Définition V.1), V une préalgèbre zéro-neutre ((2), Définition V.4) et P est canoniquement isomorphe à $U \times V$.

Soit s un idempotent associatif dans P vérifiant (C1) et (C4): il définit comme p une préalgèbre forte X et une préalgèbre zéro-neutre Y.

LEMME VI.1. *La camposante de a dans* X [*resp.* Y] *est* $a_1 \oplus s_2$ [*resp.* $s_1 \oplus a_2$].

Preuve: p étant central dans la préalgèbre U, il résulte de la Proposition V.3 que s_1 est central dans U...

LEMME VI.2. X *est isomorphe à* U ; Y *est isomorphe à* V.

Preuve. Lemme II.1 de (1), compte tenu du lemme précédent.

Ainsi la structure de la préalgèbre U [resp. V] est indépendante de p: on l'appelle la *composante forte* [resp. *zéro-neutre*] de P.

THÉORÈME VI.3. *Toute préalgèbre contenant un idempotent associatif qui vérifie* (C1) *et* (C4) *est isomorphe au produit de sa composante forte par sa camposante zéro-neutre.*

Cette propriété est une généralisation directe du Théorème V.8 de (2).

Références

[1] A. Batbedat (1973) – *Préanneaux idempotents*, « Accademia Nazionale dei Lincei », ser. VIII, *55* (5), 325–330.

[2] A. Batbedat (1973) – *Préanneaux booléens Préanneaux zéro-neutres*, « Accademia Nazionale dei Lincei », ser. VIII, *55* (6), 645–649.

[3] A. Batbedat (1975) – *Préalgèbres, biunalgèbres et unalgèbres*, « Accademia Nazionale dei Lincei », ser. VIII, 00 (0), 000–000.

[4] A. Batbedat (1975) – *Sur les fondements de la géométrie affine*, « Comptes Rendus Acad. Sc. Paris », A–857.

[5] A. Batbedat (1971) – *Anneaux d'ordre n*, « Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées », *16* (9).

[6] P. Janin (1968) – *Préanneaux*, Thèse de Doctorat d'Etat, Lyon.