Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Donato Saeli

Problemi di decisione per algebre connesse a logiche a più valori

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.3-4, p. 219–223.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_3-4_219_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Logica matematica. — *Problemi di decisione per algebre connesse a logiche a più valori.* Nota [*] di DONATO SAELI, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this Note the Ł-chains elementary theory is proved to be decidable (cfr. [5]).

PREMESSA

Questa Nota riguarda il problema di decisione per le teorie Ł e ŁC. I modelli di Ł sono le MV-algebre, legate al calcolo proposizionale a più valori. ŁC è una estensione di Ł e i suoi modelli sono le MV-algebre linearmente ordinate (Ł-catene).

Il problema di decisione per ŁC viene ridotto a quello risolto della decidibilità della teoria dei gruppi abeliani ordinati, conseguentemente si giunge alla decidibilità della teoria universale di Ł e alla decidibilità del calcolo proposizionale a più valori.

1. TEORIA Ł: DEFINIZIONI E PROPRIETÀ

Si considera il linguaggio elementare dotato, come segni descrittivi di:

a) due costanti individuali; 0 e 1,

b) un simbolo funzionale binario: $+$ ed uno unario: $'$;

e in questo linguaggio la teoria Ł col seguente sistema di assiomi:

a_1 $(x+y)+z = x+(y+z)$;

a_2 $x+0 = x$;

a_3 $x+y = y+x$;

a_4 $x+1 = 1$;

a_5 $(x')' = x$;

a_6 $0' = 1$;

a_7 $x + x' = 1$;

a_8 $(x'+y)'+y = (x+y')'+x$.

Diremo MV-algebra ogni struttura $\langle A, +, '; 0, 1\rangle$ che sia modello di Ł.

(*) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1975.

Il sistema di assiomi a_1 — a_8 scelto per Ł è lo stesso sistema usato in [5]; *da ciò che segue si può notare che il sistema di assiomi (ridondante) usato in* [1] *è equivalente ad* a_1 — a_8.

Richiamiamo brevemente da [5] alcune definizioni e proprietà concernenti le MV–algebre.

In ogni MV–algebra $\langle A, +, '; 0, 1 \rangle$ si possono introdurre le operazioni:

DEFINIZIONE 1.1. $x \cdot y = (x' + y')'$,

DEFINIZIONE 1.2. $x \vee y = (x + y')' + x$,

DEFINIZIONE 1.3. $x \wedge y = (x' \vee y')'$,

e la relazione:

DEFINIZIONE 1.4. $x \leq y$ sse $x' + y = 1$, $(x, y \in A)$.

LEMMA 1.5. *In ogni* MV–*algebra* $\langle A, +, '; 0, 1 \rangle$ *la relazione* $\leq$ *è di ordine parziale e risulta compatibile con l'operazione* $+$; *inoltre per ogni* $x \in A$ *si ha*: $0 \leq x \leq 1$.

LEMMA 1.6. *In ogni* MV–*algebra valgono le seguenti proprietà*:

a) $x + y = 0$ sse $x = 0$ *e* $y = 0$;

b) $0 < x$ *implica* $0 < y + x$.

LEMMA 1.7. *In ogni* MV–*algebra* $\langle A, +, '; 0, 1 \rangle$ *la struttura* $\langle A, \vee, \wedge; 0, 1 \rangle$ *risulta un reticolo (distributivo)* [1] *dotato di massimo e di minimo e l'ordine parziale ad esso associato coincide con l'ordine parziale* $\leq$ *già definito*.

Conseguenza immediata dei lemmi precedenti è il

LEMMA 1.8. *In ogni* MV–*algebra valgono le seguenti proprietà*:

a) $x = y$ sse $x' + y = 1$ *e* $x + y' = 1$;

b) $x' + y = 1$ *e* $x + y' = 1$ sse $(x' + y)' + (x + y')' = 0$;

c) $x' + v = 1$ *e* $y' + v = 1$ implica $(x \vee y)' + v = 1$;

d) $x + v' = 1$ *e* $y + v' = 1$ implica $(x \wedge y) + v' = 1$.

Possiamo provare ora il

LEMMA 1.9. *In ogni* MV–*algebra valgono le seguenti equazioni*:

a) $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$;

b) $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$.

(1) La distributività segue dal Lemma 3.3.

Dimostrazione: *a*) Si ha:

$$(x + (y \wedge z))' + x + y = (x' + (y \wedge z)')' + (y \wedge z)' + y = 1 ,$$

analogamente

$(x + (y \wedge z))' + x + z = 1$ e per 1.8 d) $(x + (y \wedge z))' + ((x + y) \wedge (x + z)) = 1$;

inoltre

$$y + x + ((x + y) \wedge (x + z))' = 1 \quad e \quad z + x + ((x + y) \wedge (x + z))' = 1$$

e per 1.8 c) $(y' \vee z')' + x + ((x + y) \wedge (x + z))' = 1$

cioè

$$(y \wedge z) + x + ((x + y) \wedge (x + z))' = 1 \text{ e per 1.8 a)}$$

l'asserto.

b) Dimostrazione analoga alla precedente.

2. TEORIA ŁC. RELAZIONE TRA LE Ł–CATENE E I GRUPPI ABELIANI ORDINATI

Chiamiamo ŁC la teoria estensione di Ł ottenuta aggiungendo l'assioma:

a_9 $$(x + y' = 1) \vee (x' + y = 1) .$$

Diremo Ł–catena ogni MV–algebra che sia anche modello di ŁC.

È chiaro che le Ł–catene sono quelle particolari MV–algebre nelle quali la relazione d'ordine $\leq$ è totale.

Ciò che segue in questo paragrafo è un breve richiamo di quanto esposto in [2] e riguarda i legami tra le Ł–catene e i gruppi abeliani ordinati.

Dato un gruppo abeliano, notato additivamente, ordinato

$$\mathcal{G} = \langle G ; \leq ; + , - ; 0 \rangle ,$$

e fissato un elemento positivo c di $\mathcal{G}$, indicheremo con $G[c]$ l'insieme di tutti gli elementi $x \in G$ tali che $0 \leq x \leq c$.

Definiamo su $G[c]$ le operazioni $\overset{\circ}{+}$ e ${}^{\overset{\circ}{\prime}}$ come segue:

$$x \overset{\circ}{+} y = \min(c , x + y) , \; x^{\overset{\circ}{\prime}} = c - x .$$

LEMMA 2.1. *La struttura* $\mathcal{G}_c = \langle G[c] , \overset{\circ}{+} , {}^{\overset{\circ}{\prime}} ; 0 , c \rangle$ *è una Ł–catena.*

Sia ora $\mathcal{A} = \langle A , + , ' ; 0 , 1 \rangle$ una Ł–catena; in $\mathbf{Z} \times A$ consideriamo le coppie del tipo $(n , 0)$ e quelle del tipo $(m , 1)$, con $m , n \in \mathbf{Z}$ arbitrari; indichiamo con A^* l'insieme ottenuto da $\mathbf{Z} \times A$ mediante l'identificazione:

$$(m + 1 , 0) = (m , 1).$$

Su A^* definiamo le seguenti operazioni:

$$(m\,,x)\,\hat{+}\,(n\,,y)=\begin{cases}(m+n\,,x+y) & \text{se}\quad x+y<1\\ (m+n+1\,,x\cdot y) & \text{se}\quad x+y=1\,,\end{cases}$$

$$\hat{-}\,(m\,,x)=(-m-1\,,x')\,;$$

e la seguente relazione:

$$(m\,,x)\,\hat{\leq}\,(n\,,y)\qquad\text{sse}\quad m<n\qquad\text{oppure}\quad m=n\ e\ x\leq y\,.$$

LEMMA 2.2. *La struttura* $\mathcal{A}^*=\langle A^*\,;\hat{\leq}\,;\hat{+}\,,\hat{-}\,;(0\,,0)\rangle$ *un gruppo abeliano ordinato.*

LEMMA 2.3. *Se* $\mathcal{A}$ *è una Ł-catena, allora* $(\mathcal{A}^*)_{(0,1)}$ *è isomorfa ad* $\mathcal{A}$; *inoltre, l'elemento* $(0\,,1)$ in $\mathcal{A}^*$ *ha la proprietà che per ciascun* $x\in\mathcal{A}^*$, *vi è un* $n\in\mathbf{Z}$ *tale che* $n(0\,,1)\leq x<(n+1)(0\,,1)$.

D'altra parte, se $\mathcal{G}$ *è un gruppo abeliano ordinato e* c *un elemento positivo di* $\mathcal{G}$ *tale che per ciascun* $x\in\mathcal{G}$, *vi è un* $n\in\mathbf{Z}$ *tale che* $nc\leq x<(n+1)\,c$, *allora* $(\mathcal{G}_c)^*$ *è isomorfo a* $\mathcal{G}$.

COROLLARIO 2.4. *Sia* $\mathcal{G}=\langle G\,;\leq\,;+\,,-\,;0\rangle$ *un gruppo abeliano ordinato e sia* c *un suo elemento positivo*; $(\mathcal{G}_c)^*$ *è isomorfo al sottogruppo di* $\mathcal{G}$ *generato da* $G[c]$.

3. DECIDIBILITÀ DELLA TEORIA ŁC

Il seguente Teorema è una generalizzazione del Lemma 7 di [2].

TEOREMA 3.1. *Ad ogni enunciato* α *della teoria* ŁC *corrisponde «effettivamente» un enunciato* α^* *della teoria* OAG, *dei gruppi abeliani ordinati, tale che* $\vdash_{\text{ŁC}}\alpha$ sse $\vdash_{\text{OAG}}\alpha^*$.

Dimostrazione. Sia α un enunciato della teoria ŁC e $\beta(x)$ la formula di ŁC: $(0\leq x)\wedge(x\leq 1)$. Sia $\bar{\alpha}$ la *relativizzazione* di α a $\beta(x)$. (Osserviamo che: $\vdash_{\text{ŁC}}\alpha$ sse $\vdash_{\text{ŁC}}\bar{\alpha}$). Sia y una variabile che non compare in α. Sia $\bar{\alpha}^*$ la formula della teoria OAG ottenuta da $\bar{\alpha}$ col seguente procedimento:

rimpiazziamo in $\bar{\alpha}$ ogni occorrenza del simbolo 1 con il simbolo y, rimpiazziamo in $\bar{\alpha}$ ciascuna espressione della forma $\nu+\xi$ con l'espressione $\min(\nu\,\hat{+}\,\xi\,,y)$ («*min*» è ovviamente definibile nella teoria OAG) e ciascuna espressione della forma ξ' con l'espressione $y-\xi$.

Sia infine α^* il seguente enunciato della teoria OAG: $\forall y\,(y>0\rightarrow\bar{\alpha}^*)$. Proviamo che $\vdash_{\text{ŁC}}\alpha$ sse $\vdash_{\text{OAG}}\alpha^*$.

In primo luogo osserviamo che *se* $\mathcal{G}$ *è un gruppo abeliano ordinato e* c *un suo elemento* >0, $\mathcal{G}\models\bar{\alpha}^*[c]$ sse $\mathcal{G}_c\models\alpha$.

1) Sia $\vdash_{\text{ŁC}}\alpha$. Per assurdo supponiamo $\nvdash_{\text{OAG}}\alpha^*$: allora vi sono un gruppo abeliano ordinato $\mathcal{G}$ ed un suo elemento $c>0$ tali che $\mathcal{G}\not\models\bar{\alpha}^*[c]$, quindi $\mathcal{G}_c\not\models\alpha$, ed infine $\nvdash_{\text{ŁC}}\alpha$ contro l'ipotesi.

2) Sia ora $\vdash_{OAG} \alpha^*$. Supponiamo $\nvdash_{ŁC} \alpha$: allora esisterà una Ł–catena $\mathscr{A}$ che non soddisfa α; per il Lemma 2.3 $(\mathscr{A}^*)_{(0,1)}$ non soddisfa α quindi $\mathscr{A}^* \not\models \bar{\alpha}^* [(0 , 1)]$ ed infine $\nvdash_{OAG} \alpha^*$, contro l'ipotesi.

Sappiamo che la teoria OAG è decidibile (cfr. [4]), segue così il

COROLLARIO 3.2. *La teoria* ŁC *è decibidile.*

Richiamiamo ora due risultati rispettivamente da [2] e da [3];

LEMMA 3.3. *Ogni* MV–*algebra è prodotto sottodiretto di* Ł–*catene.*

LEMMA 3.4. *Se la teoria di una classe* K *di modelli è decidibile anche la teoria di tutti i prodotti diretti di modelli di* K *è decidibile.*

Segue così il

COROLLARIO 3.5. *La teoria universale di* Ł *è decidibile.*

Infine per ciò che riguarda il calcolo proposizionale ad infiniti valori osserviamo che da quanto esposto nel § 2 di [1] segue che ad ogni enunciato A del calcolo si può associare una equazione α di Ł tale che: $\vdash$ A sse $\vdash_{Ł} \alpha$; dal Corollario 3.5 segue così la decibidilità del calcolo.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. C. CHANG (1958) – *Algebraic analysis of many valued logics*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *88*, 467–490.
[2] C. C. CHANG (1959) – *A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *95*, 74–80.
[3] YU. L. ERSHOV, I. A. LAVROV, A. D. TAIMANOV e M. A. TAITSLIN (1965) – *Elementary theories*, « Russian Mathematicol Surveys », *20*, 35–105.
[4] YU. SH. GUREVICH (1964) – *Elementary properties of ordered abelian groups*, « Algebra i Logika Seminar », *3* (1), 5–39.
[5] P. MANGANI (1973) – *Su certe algebre connesse con logiche a più valori*, « Bollettino U.M.I. » *8* (4), 68–78.
[6] A. ROSE e J. B. ROSSER (1958) – *Fragments of many valued statement calculi*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *87*, 1–53.