Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Federico Menegazzo

I gruppi finiti il cui reticolo dei sottogruppi è un prodotto subdiretto

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.3-4, p. 213–218.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_3-4_213_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1975 (Settembre–Ottobre)
(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I
(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *I gruppi finiti il cui reticolo dei sottogruppi è un prodotto subdiretto* (*). Nota (**) di FEDERICO MENEGAZZO, presentata dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — We determine the finite groups whose lattice of subgroups is a subdirect product of lattices; the main tool we use is the treatment of L-homomorphisms of finite groups made by G. Zappa in [2].

Un teorema ben noto di M. Suzuki ([1], p. 5) descrive i gruppi il cui reticolo dei sottogruppi è un prodotto diretto; in questa Nota si determinano invece i gruppi finiti il cui reticolo dei sottogruppi è un prodotto subdiretto: la descrizione, piuttosto complicata, è nel Teorema del n. 2.

Lo strumento principale per ottenere il risultato qui esposto è lo studio fatto da G. Zappa in [2] dei gruppi finiti il cui reticolo dei sottogruppi è dotato di un omomorfismo proprio.

1. Se L, L_i ($i \in I$; $|I| \geq 2$) sono reticoli, una rappresentazione di L come prodotto subdiretto degli L_i è un omomorfismo reticolare iniettivo $\varphi : L \to \times_{i \in I} L_i$ dove $\times_{i \in I} L_i$ indica il consueto prodotto cartesiano dei reticoli L_i, tale che, detta $\pi_j : \times_{i \in I} L_i \to L_j$ la j-esima proiezione ($j \in I$), $\varphi\pi_j$ sia una suriezione. Equivalentemente, una rappresentazione di L come prodotto subdiretto

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi afferenti il Comitato per la matematica del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 22 settembre 1975.

degli L_i può essere definita come una famiglia $\{\varphi_i : L \to L_i\}_{i \in I}$ di omomorfismi reticolari suriettivi tale che se $x, y \in L$, $x^{\varphi_i} = y^{\varphi_i}$ per ogni $i \in I$, allora $x = y$. Ogni reticolo L ammette rappresentazioni come prodotto subdiretto; ad esempio, se $L' = \{O\}$ è un reticolo costituito dal solo elemento O, la mappa $i : L \to L \times L'$ tale che $x^i = (x, O)$ è una tale rappresentazione; lo stesso dicasi per la mappa $\delta : L \to L \times L$ definita ponendo $x^\delta = (x, x)$. Per evitare tali casi banali, diremo che la rappresentazione φ di L come prodotto subdiretto dei reticoli L_i è propria se, per ogni $j \in I$, $\varphi\pi_j$ è omomorfismo proprio, cioè se $\varphi\pi_j$ non è né iniettivo né nullo. Un caso notevole di rappresentazione propria come prodotto subdiretto si ottiene quando il reticolo L, dotato di massimo I e di minimo O, possiede un elemento neutro u diverso da O e da I; in tal caso infatti ponendo $x^{\varphi_1} = x \wedge u$ e $x^{\varphi_2} = x \vee u$ si ottengono due omomorfismi propri $\varphi_1 : L \to [u/O]$ e $\varphi_2 : L \to [I/u]$ tali che da $x^{\varphi_1} = y^{\varphi_1}$ e $x^{\varphi_2} = y^{\varphi_2}$ segue $x = y$. Vale inoltre la seguente proposizione, di dimostrazione ovvia:

PROPOSIZIONE. *Il reticolo* L *ammette una rappresentazione propria come prodotto subdiretto di un numero finito di reticoli se e solo se* L *ammette una tale rappresentazione con due soli fattori*; *se* L *è finito* L *ammette una rappresentazione propria come prodotto subdiretto di reticoli se e solo se* L *ammette una tale rappresentazione con due fattori.*

Sia ora G un gruppo; diremo che G è reticolarmente un prodotto subdiretto se esiste una rappresentazione propria del reticolo $\mathcal{L}(G)$ dei sottogruppi di G (rispetto alle operazioni di reticolo consuete) come prodotto subdiretto di reticoli.

LEMMA. *Siano* G *un gruppo finito*, $\sigma : \mathcal{L}(G) \to L$ *un omomorfismo di reticoli.* σ *è iniettivo se e solo se, fissato un sistema completo* $\mathcal{S}$ *di sottogruppi di Sylow di* G, *per ogni sottogruppo di Sylow* S *di* $\mathcal{S}$ *la restrizione di* σ *ad* $\mathcal{L}(S)$ *è iniettiva.*

Dimostrazione. La condizione è ovviamente necessaria. Per la sufficienza, supponiamo che σ non sia iniettivo, e siano $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tali che $A < B$, $A^\sigma = B^\sigma$. Se p è un numero primo che divide $|B : A|$, esiste un p-sottogruppo di Sylow T di B non contenuto in A. Risulta $A^\sigma \vee T^\sigma = A^\sigma$, cioè $T^\sigma \leq A^\sigma$, da cui $(A \wedge T)^\sigma = A^\sigma \wedge T^\sigma = T^\sigma$. Se S è un p-sottogruppo di Sylow di G contenente T, i sottogruppi $A \wedge T$ e T di S sono distinti ma hanno la stessa immagine tramite σ. Non può essere $S^\sigma = 1^\sigma$, perché S sarebbe contenuto nel nucleo inferiore E di σ come tutti i suoi coniugati, quindi σ induce su $\mathcal{L}(S)$ un omomorfismo proprio. Se S fosse un gruppo generalizzato dei quaternioni, sarebbe normale e quindi in $\mathcal{S}$, oppure il centro di S coinciderebbe con $S \wedge E = S^x \wedge E$ per ogni $x \in G$ [1, Prop. 3.7, p. 71], e σ non sarebbe iniettivo sul reticolo di un elemento di $\mathcal{S}$. Resta che S sia ciclico, con complemento normale K [1, Prop. 3.5, p. 70]; se $g \in K$ è tale che $S^g \in \mathcal{S}$, risulta $((A \wedge T)^g \vee K)^\sigma = ((A \wedge T) \vee K)^\sigma = (T \vee K)^\sigma = (T^g \vee K)^\sigma$, da cui $((A \wedge T)^g)^\sigma = (((A \wedge T)^g \vee K) \wedge S^g)^\sigma = ((T^g \vee K) \wedge S^g)^\sigma = (T^g)^\sigma$, e la restrizione di σ ad $\mathcal{L}(S^g)$ non sarebbe iniettiva, contro l'ipotesi.

2. I gruppi finiti che sono reticolarmente un prodotto subdiretto sono descritti dal seguente:

TEOREMA. *Sia* G *un gruppo finito.* G *è reticolarmente un prodotto subdiretto se e solo se* $G = (A_1 \times A_2 \times B) C$ *con* A_1, A_2, B, C *sottogruppi di* G *con gli ordini a due a due primi tra loro,* A_1, A_2 *e* B *normali in* G *e inoltre*

i) $A_2 = B = 1$, C *ciclico o* 2-*gruppo dei quaternioni generalizzato,* $\mathscr{C}_C(A_1) \neq 1$; *se* $A_1 = 1$ $|C|$ *non è un numero primo*; *oppure*

ii) $A_1 = A_2 = 1$, *il* 2-*sottogruppo di Sylow di* B *è generalizzato dei quaternioni e il suo sottogruppo di ordine* 2 *è nel centro di* B, C *ciclico, esiste un primo* p *ed una coppia di sottogruppi* U, V *del* p-*sottogruppo di Sylow* C_p *di* C *tali che* $|V:U| = p$, $\mathscr{C}_B(U) = \mathscr{C}_B(V)$, $И_B(U) = И_B(V)$; *oppure*

iii) $A_1 = A_2 = 1$, C *ciclico, esistono due primi* p_1 *e* p_2 *e due diverse coppie* U_i, V_i *di sottogruppi dei* p_i-*sottogruppi di Sylow* C_{p_i} *di* C *tali che* $|V_i : U_i| = p_i$, $\mathscr{C}_B(V_i) = \mathscr{C}_B(U_i)$, $И_B(V_i) = И_B(U_i)$ $(i = 1, 2)$; *oppure*

iv) $A_2 = 1$, $A_1 \neq 1$, B *come in* ii), C *ciclico, per ogni* p-*sottogruppo di Sylow* C_p *di* C $\mathscr{C}_B(\mathscr{C}_{C_p}(A_1)) = \mathscr{C}_B(C_p)$, $И_B(\mathscr{C}_{C_p}(A_1)) = И_B(C_p)$; *oppure*

v) $A_2 = 1$, $A_1 \neq 1$, $B \neq 1$, C *ciclico, per ogni* p-*sottogruppo di Sylow* C_p *di* C $\mathscr{C}_B(\mathscr{C}_{C_p}(A_1)) = \mathscr{C}_B(C_p)$, $И_B(\mathscr{C}_{C_p}(A_1)) = И_B(C_p)$, *ed esiste un primo* p *ed una coppia di sottogruppi* U, V *di* $\mathscr{C}_{C_p}(A_1)$ *tali che* $|V:U| = p$, $\mathscr{C}_B(U) = \mathscr{C}_B(V)$, $И_B(U) = И_B(V)$; *oppure*

vi) $A_1 \neq 1$, $A_2 \neq 1$, C *ciclico,* $G = \mathscr{C}_G(A_1)\mathscr{C}_G(A_2)$, *per ogni* p-*sottogruppo di Sylow* C_p *di* C $\mathscr{C}_B(\mathscr{C}_{C_p}(A_i)) = \mathscr{C}_B(C_p)$, $И_B(\mathscr{C}_{C_p}(A_i)) = И_B(C_p)$ $(i = 1, 2)$ (1).

Dimostrazione. Sia $\varphi : \mathscr{L}(G) \to L_1 \times L_2$ una rappresentazione propria di $\mathscr{L}(G)$ come prodotto subdiretto; poniamo $\varphi_i = \varphi\pi_i$ $(i = 1, 2)$. Supponiamo dapprima che G abbia un 2-sottogruppo di Sylow S generalizzato dei quaternioni, e che l'immagine di $\mathscr{L}(S)$ tramite uno dei φ_i, ad esempio φ_1, sia una catena di lunghezza 1. In questo caso, detto Z il sottogruppo di ordine 2 di S, Z sta nel centro di G e G ha 2-complemento normale T ([1], prop. 3.6, p. 70 e Prop. 3.7, p. 71); posto cioè $A_1 = T$, $C = S$ si ottiene la decomposizione prevista al punto i). Supponiamo ora che G abbia un 2-sottogruppo di Sylow generalizzato dei quaternioni, che uno dei φ_i, ad esempio φ_2, subordini su $\mathscr{L}(S)$ un omomorfismo proprio, ma che l'immagine di $\mathscr{L}(S)$ non sia una catena di lunghezza 1 né mediante φ_1 né mediante φ_2.

È noto (sostanzialmente contenuto ad esempio in [2]) che allora, detto ancora Z il sottogruppo di ordine 2 di S, è $Z^{\varphi_2} = 0$ e, se X, Y sono sottogruppi non identici di S, distinti, $X^{\varphi_2} \neq Y^{\varphi_2}$; Z sta nel centro di G ([1], Prop. 3.6, p. 70).

(1) Se X, Y sono sottogruppi del gruppo G, con $И_X(Y)$ denotiamo l'insieme dei sottogruppi di X normalizzati da Y.

D'altra parte $Z^{\varphi_1} \neq 0$ e anzi φ_1 subordina su $\mathscr{L}(S)$ un isomorfismo. In base a [2] possiamo affermare che i p-sottogruppi di Sylow di G la cui immagine tramite φ_1 è O costituiscono un sottogruppo normale di Hall A_1; i p-sottogruppi di Sylow di G (tra i quali S) sul cui reticolo φ_1 subordina un isomorfismo costituiscono un sottogruppo normale di Hall B; $A_1 \wedge B = 1$; $A_1 \times B$ ha complemento ciclico C e sono soddisfatte le rimanenti condizioni previste in ii) se $A_1 = 1$ (è sufficiente scegliere U , V tali che $1 \leq U < V \leq C_p$, $U^{\varphi_1} = V^{\varphi_1}$) o in iv) se $A_1 \neq 1$.

Possiamo ora supporre che o G non abbia 2-sottogruppi di Sylow che sono quaternioni generalizzati, oppure né φ_1 né φ_2 inducano sul reticolo di tali sottogruppi un omomorfismo proprio.

In queste ipotesi, diciamo P l'insieme dei numeri primi p tali che esista un p-sottogruppo di Sylow di G sul cui reticolo φ_1 o φ_2 induca un omomorfismo proprio. Ogni p-sottogruppo di Sylow di G con $p \in P$ è ciclico e ha complemento normale T_p; poniamo $T = \bigwedge_{p \in P} T_p$; T ha allora complemento ciclico C. I p-sottogruppi di Sylow di G la cui immagine tramite φ_i è O costituiscono un sottogruppo normale di Hall $A_i \leq T$ $(i = 1 , 2)$; $(A_1 \wedge A_2)^{\varphi_i} = 1^{\varphi_i}$ $(i = 1 , 2)$ comporta $A_1 \wedge A_2 = 1$. I p-sottogruppi di Sylow di G sul cui reticolo φ_i subordina un isomorfismo costituiscono un sottogruppo normale di Hall B_i $(i = 1 , 2)$; e sia $B = B_1 \wedge B_2$. Risulta: $A_1 \times B \leq B_2$, $A_2 \times B \leq B_1$, $T = A_1 \times A_2 \times B$.

Distinguiamo ora diversi casi:

a) $A_1 = A_2 = B = 1$: poiché $G = C$ e $\mathscr{L}(C)$ possiede un omomorfismo proprio, $|C|$ non può essere un numero primo, e G verifica i);

b) $A_2 = B = 1$, $A_1 \neq 1$; il nucleo superiore $G_0^{(1)}$ di φ_1 è un sottogruppo normale non identico, con $A_1 \wedge G_0^{(1)} = 1$; è pertanto $G_0^{(1)} \leq C$, $1 < G_0^1 \leq \mathscr{C}_C(A_1)$ e G verifica ancora i);

c) $A_1 = A_2 = 1$, $B \neq 1$; φ_i induce un omomorfismo proprio su un p_i-sottogruppo di Sylow C_{p_i} di C; se U_i , V_i sono sottogruppi di C_{p_i} tali che $|V_i : U_i| = p_i$ e $U_i^{\varphi_i} = V_i^{\varphi_i}$, allora $\mathscr{C}_B(V_i) = \mathscr{C}_B(U_i)$, $И_B(V_i) = И_B(U_i)$ $(i = 1 , 2)$ [2]; se $U_1^{\varphi_1} = V_1^{\varphi_1}$ certo $U_1^{\varphi_2} \neq V_1^{\varphi_2}$: G soddisfa ii);

d) $A_2 = 1$, $A_1 \neq 1$, $B \neq 1$: per ogni p-sottogruppo di Sylow C_p di C è $(G_0^{(1)} \wedge C_p)^{\varphi_1} = C_p^{\varphi_1}$, $G_0^{(1)} \wedge C_p \leq \mathscr{C}_{C_p}(A_1)$, quindi $\mathscr{C}_{C_p}(A_1)^{\varphi_1} = C_p^{\varphi_1}$ da cui [2] $\mathscr{C}_B(\mathscr{C}_{C_p}(A_1)) = \mathscr{C}_B(C_p)$, $И_B(\mathscr{C}_{C_p}(A_1)) = И_B(C_p)$; inoltre esiste un p-sottogruppo di Sylow C_p di C sul cui reticolo φ_2 induce un omomorfismo proprio; se U , V sono sottogruppi distinti di C_p tali che $U^{\varphi_2} = V^{\varphi_2}$, non possono essere entrambi $\geq \mathscr{C}_{C_p}(A_1)$, perché altrimenti sarebbe anche $U^{\varphi_1} = V^{\varphi_1}$; è chiaro allora che U , V possono essere scelti $\leq \mathscr{C}_{C_p}(A_1)$ e G verifica v);

e) $A_1 = 1$, $A_2 \neq 1$, $B \neq 1$: ci si riconduce al caso precedente scambiando φ_1 con φ_2;

f) $A_1 \neq 1$, $A_2 \neq 1$: come in *d)* $(G_0^{(i)} \wedge C_p)^{\varphi_i} = C_p^{\varphi_i}$, $\mathscr{C}_{C_p}(A_i)^{\varphi_i} = C_p^{\varphi_i}$ da cui $\mathscr{C}_B(\mathscr{C}_{C_p}(A_i)) = \mathscr{C}_B(C_p)$, $И_B(\mathscr{C}_{C_p}(A_i) = И_B(C_p)$; se poi $\mathscr{C}_{C_p}(A_1) \neq C_p$

non può essere $\mathscr{C}_{C_p}(A_2) \neq C_p$, altrimenti, detto M il sottogruppo massimo di C_p, sarebbe $M^{\varphi_1} = C_p^{\varphi_1}$, $M^{\varphi_2} = C_p^{\varphi_2}$; cioè $\mathscr{C}_G(A_1)\,\mathscr{C}_G(A_2) \geq C$ e G verifica vi).

Viceversa, supponiamo che G abbia la struttura descritta nell'enunciato. e costruiamo, nei vari casi previsti, una coppia di omomorfismi reticolari che fornisca una rappresentazione propria di $\mathscr{L}(G)$ come prodotto subdiretto,

Se G verifica i) e U è un sottogruppo di ordine primo di $\mathscr{C}_C(A_1)$, U è neutro in $\mathscr{L}(G)$ ([1], Th. 12, p. 79) e la rappresentazione è stata descritta al n. 1.

G verifichi ii): detto Z l'unico sottogruppo di ordine 2 di B, $\sigma : \mathscr{L}(G) \to \mathscr{L}(G/Z)$ dato da $X^\sigma = XZ/Z$ è un omomorfismo proprio ([1], Th. 13, p. 79). Se H , K sono due sottogruppi di C, $H = \Pi H_q$, $K = \Pi K_q$ le rispettive decomposizioni primarie, diciamo $H \sim K$ se $H_q = K_q$ per ogni primo $q \neq p$ e inoltre $H_p = K_p$ oppure $H_p = U$, $K_p = V$ oppure $H_p = V$, $K_p = U$. Siamo poi X , Y sottogruppi di G; essi possono essere rappresentati come $X = (X \wedge B)\, X_1$, $Y = (Y \wedge B)\, Y_1$ con $|X_1|$ e $|Y_1|$ divisori di $|C|$; diremo $X \equiv Y$ se $X \wedge B = Y \wedge B$ ed esiste $b \in B$ tale che $X_1^b \sim Y_1^b$. $\equiv$ è una congruenza in $\mathscr{L}(G)$ e la mappa τ che ad ogni sottogruppo di G associa la sua classe di congruenza è un omomorfismo proprio ([2], pp. 91 e seguenti). Se $X , Y \in \mathscr{L}(G)$, $X \neq Y$, $X^\sigma = Y^\sigma$, allora è $X = Y \times Z$ oppure $Y = X \times Z$; in entrambi i casi $X \wedge B \neq Y \wedge B$ e quindi $X^\tau \neq Y^\tau$: la coppia σ , τ è quella cercata.

G verifichi iii): se H , K sono due sottogruppi di C, $H = \Pi H_q$, $K = \Pi K_r$ le rispettive decomposizioni primarie, diciamo $H \sim_i K$ se $H_q = K_q$ per ogni primo $q \neq p_i$ e inoltre $H_{p_i} = K_{p_i}$ oppure $H_{p_i} = U_i$, $K_{p_i} = V_i$ oppure $H_{p_i} = V_i$, $K_{p_i} = U_i$. Se poi $X , Y \in \mathscr{L}(G)$, rappresentatili nella forma $X = (X \wedge B)\, X_1$, $Y = (Y \wedge B)\, Y_1$ con $|X_1|$ e $|Y_1|$ divisori di $|C|$, poniamo $X \equiv_i Y$ se $X \wedge B = Y \wedge B$ ed esiste $b \in B$ tale che $X_1^b \sim_i Y_1^b$ $(i = 1 , 2)$. $\equiv_1$ e $\equiv_2$ sono congruenze in $\mathscr{L}(G)$, la mappe τ_1 e τ_2 che ad ogni elemento di $\mathscr{L}(G)$ associano la propria classe di congruenza rispettivamente modulo $\equiv_1$ e $\equiv_2$ sono omomorfismi propri; da $X \equiv_1 Y$ e $X \equiv_2 Y$ segue $X = Y$: la coppia τ_1 , τ_2 fornisce la rappresentazione cercata.

G verifichi iv): detto ancora Z l'unico sottogruppo di ordine 2 di B, $\sigma : \mathscr{L}(G) \to \mathscr{L}(G/Z)$ dato da $X^\sigma = XZ/Z$ è un omomorfismo proprio. Poniamo poi $A_1\,\mathscr{C}_G(A_1) = A_1 \times N_1$; risulta $1 < B \leq N_1 < G$; $\tau : \mathscr{L}(G) \to \mathscr{L}(N_1)$ dato da $X^\tau = X \wedge N_1$ è un omomorfismo proprio ([1], Th. 11, p. 75) e σ , τ forniscono la rappresentazione cercata.

G verifichi v): posto ancora $A_1\,\mathscr{C}_G(A_1) = A_1 \times N_1$, risulta $1 < B \leq N_1 < G$ e $\sigma : \mathscr{L}(G) \to \mathscr{L}(N_1)$ dato da $X^\sigma = X \wedge N_1$ è un omomorfismo proprio. Se H , K sono sottogruppi di C, $H = \Pi H_q$, $K = \Pi K_q$ le rispettive decomposizioni primarie, diciamo $H \sim K$ se $H_q = K_q$ per ogni primo $q \neq p$ e inoltre $H_p = K_p$ oppure $H_p = U$, $K_p = V$ oppure $H_p = V$, $K_p = U$. Siano poi $X , Y \in \mathscr{L}(G)$ rappresentati nella forma $X = (X \wedge A_1)\,(X \wedge B)\, X_1$, $Y = (Y \wedge A_1)\,(Y \wedge B)\, Y_1$ con $|X_1|$, $|Y_1|$ divisori di $|C|$; diciamo $X \equiv Y$

se $X \wedge A_1 = Y \wedge A_1$, $X \wedge B = Y \wedge B$ ed esiste $b \in B$ tale che $X_1^b \sim Y_1^b$. $\equiv$ è una congruenza in $\mathscr{L}(G)$ e se per ogni $X \in \mathscr{L}(G)$ diciamo X^τ la sua classe di congruenza otteniamo un omomorfismo proprio. Se $X, Y \in \mathscr{L}(G)$, $X \neq Y$ ma $X^\tau = Y^\tau$, allora X_1 ed Y_1 sono contenuti in $\mathscr{C}_{C_p}(A_1) \leq N_1$, $X = (X \wedge A_1) \times (X \wedge N_1)$, $Y = (Y \wedge A_1) \times (Y \wedge N_1)$ e dunque $X^\sigma = X \wedge N_1 \neq$ $\neq Y \wedge N_1 = Y^\sigma$: σ, τ forniscono una rappresentazione propria di $\mathscr{L}(G)$ come prodotto subdiretto.

G infine verifichi vi): posto $A_i \mathscr{C}_G(A_i) = A_i \times N_i$, è $1 < A_j \leq N_i < G$; $\sigma_i : \mathscr{L}(G) \to \mathscr{L}(N_i)$ dato da $X^{\sigma_i} = X \wedge N_i$ è un omomorfismo proprio ($i = 1, 2$). Osserviamo ora che, se S è un arbitrario p–sottogruppo di Sylow di G, risulta $S \leq N_1$ oppure $S \leq N_2$: la cosa è ovvia se $S \leq A_1 \times A_2 \times B = T$; altrimenti $ST/T \leq (N_1 T/T)(N_2 T/T) = G/T$ che, essendo ciclico, ha il reticolo distributivo; allora $ST/T = (ST/T \wedge N_1 T/T) \cdot (ST/T \wedge N_2 T/T)$ e quindi per un indice i $ST \leq N_i T = A_i \times N_i$, da cui $S \leq N_i$. Ma allora l'omomorfismo τ di $\mathscr{L}(G)$ definito ponendo $X^\tau = (X^{\sigma_1}, X^{\sigma_2}) \in \mathscr{L}(N_1) \times \mathscr{L}(N_2)$ è iniettivo su tutti i sottogruppi di Sylow di G, ed è dunque iniettivo, a norma del Lemma del n. 1, il che conclude la dimostrazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. SUZUKI (1956) – *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer.

[2] G. ZAPPA (1952) – *Sugli omomorfismi del reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito*, « Ricerche di Mat. », *1*, 78–106.