Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Matilde Pasqua

Una soluzione delle equazioni di Einstein-Maxwell ammettente un gruppo G_7 di automorfismi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.1-2, p. 91–99.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_1-2_91_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Relatività. — *Una soluzione delle equazioni di Einstein–Maxwell ammettente un gruppo* G_7 *di automorfismi.* Nota di MATILDE PASQUA (*), presentata (**) dal Socio C. CATTANEO.

SUMMARY. — In this note we determine the most general pure electromagnetic field compatible with a given homogeneous hyperbolic metric which has $\mathbf{R}^4$ as support and admits a full group of isometries G_7. The invariance group of the electromagnetic field is a proper subgroup (with 5 or 6 parameters) of the group G_7.

INTRODUZIONE

Nel presente lavoro si costruisce un modello cosmologico di campo elettromagnetico puro singolare che può essere interpretato, come un fluido di fotoni.

Il modello viene realizzato sulla varietà $\mathbf{R}^4$ di coordinate canoniche (x^1, x^2, x^3, x^4), munita della metrica riemanniana di tipo iperbolico normale $(+++-)$:

$$ds^2 = e^{-2bx^4}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] - 2\,a e^{-2bx^4}[(x^1)^2 + (x^2)^2](dx^4)^2 + 4\,e^{-bx^4}\,dx^3\,dx^4 \tag{1}$$

con a, b costanti $(a \neq 0)$ e dove $-\infty < x^i < +\infty$.

N. Teleman [3] ha dimostrato che tale metrica è omogenea e che il suo gruppo completo di isometrie è di dimensione 7.

Si sa che, mentre esistono varietà riemanniane di dimensione 4 ammettenti un gruppo completo di isometrie di dimensione 10, G_{10} (tutti e soli gli spazi a curvatura costante), non esistono varietà iperboliche ammettenti gruppi completi G_9 e G_8.

N. Teleman ha dimostrato che tra le metriche omogenee iperboliche normali ammettenti un gruppo G_7 esistono oltre alla (1) soltanto le metriche decomponibili del tipo

$$ds^2 = d\sigma^2 + (dx^4)^2 \quad , \quad ds^2 = d\sigma^2 - (dx^4)^2 \tag{2}$$

dove la metrica ternaria $d\sigma^2$ a curvatura costante è iperbolica $(++-)$ nel primo caso, ellittica $(+++)$ nel secondo.

Pertanto, se si eccettuano le metriche iperboliche a curvatura costante non nulla, è lecito considerare le metriche (1) e (2) come le più «vicine» alla metrica di Minkowski. In questa Nota noi prendiamo in considerazione la metrica (1).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 giugno 1975.

Il modello si costruisce determinando in modo esplicito tutte le soluzioni delle equazioni di Einstein-Maxwell compatibili con la forma (1). La soluzione generale dipende da una funzione arbitraria u di una variabile. Si dimostra che il tensore campo elettromagnetico del modello è invariante per un sottogruppo proprio del gruppo G_7 di isometrie. La dimensione di questo sottogruppo è 6 se la funzione u è lineare, altrimenti è 5.

Il campo elettromagnetico che corrisponde alle soluzioni considerate è un campo elettromagnetico singolare, quindi interpretabile come un fluido di fotoni. Le rispettive linee di corrente coincidono con le orbite di un sottogruppo di dimensione 1 del gruppo G_7.

1. Considerazioni geometriche

Consideriamo su $\mathbf{R}^4$ la metrica:

$$\mathrm{d}s^2 = e^{-2bx^4}\left[(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2\right] - 2\,a e^{-2bx^4}\left[(x^1)^2 + (x^2)^2\right](\mathrm{d}x^4)^2 + 4\,e^{-bx^4}\,\mathrm{d}x^3\,\mathrm{d}x^4 \tag{1}$$

con $a \neq 0$.

Le componenti covarianti g_{ik} e controvarianti g^{ik} del tensore metrico della (1) sono rispettivamente gli elementi delle matrici:

$$\begin{pmatrix} e^{-2bx^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2x^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,e^{-bx^4} \\ 0 & 0 & 2\,e^{-bx^4} & -2\,a\left[(x^1)^2 + (x^2)^2\right]e^{-2bx^4} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} e^{2bx^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2bx^4} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2bx^4} & \dfrac{a}{2}\left[(x^1)^2 + (x^2)^2\right] & \dfrac{1}{2}\,e^{bx^4} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\,e^{bx^4} & 0 \end{pmatrix}.$$

I simboli di Christoffel non nulli della matrice (1) sono:

$$\left\{{1 \atop 1\;4}\right\} = \left\{{1 \atop 4\;1}\right\} = \left\{{4 \atop 4\;4}\right\} = \left\{{2 \atop 2\;4}\right\} = \left\{{2 \atop 4\;2}\right\} = -\,b$$

$$\left\{{3 \atop 1\;1}\right\} = \frac{b}{2}\,e^{-bx^4} \qquad \left\{{3 \atop 1\;4}\right\} = \left\{{3 \atop 4\;1}\right\} = -\,ax^1\,e^{-bx^4} \qquad \left\{{1 \atop 4\;4}\right\} = 2\,ax^1$$

$$\left\{{3 \atop 2\;2}\right\} = \frac{b}{2}\,e^{-bx^4} \qquad \left\{{3 \atop 2\;4}\right\} = \left\{{3 \atop 4\;2}\right\} = -\,ax^2\,e^{-bx^4} \qquad \left\{{2 \atop 4\;4}\right\} = 2\,ax^2.$$

I rimanenti simboli di Christoffel sono nulli.

Il tensore di Riemann ha le seguenti componenti:

$$R^1_{414} = - R^1_{441} = R^2_{424} = - R^2_{442} = 2\,a$$

$$R^3_{114} = - R^3_{141} = R^3_{224} = - R^3_{242} = - a e^{-bx^4}.$$

Le rimanenti componenti sono nulle.

Le componenti del tensore di Ricci, $R_{ij} = R^k_{ikj}$, sono:

$$R_{ij} = 0 \qquad \text{per } (i\,,j) \neq (4\,,4) \quad , \quad R_{44} = 4\,a\,.$$

Lo scalare di curvatura è $R = 0$.

Come vedremo in seguito, con il tensore (1) si potrà costruire un modello di campo elettromagnetico puro solamente per $a > 0$. Per questo motivo studiamo la struttura di algebra di Lie dei campi di Killing della (1) solamente in questo caso.

La soluzione generale $\vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ delle equazioni di Killing relative alla metrica (1)

$$\xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = 0 \tag{3}$$

è della forma:

$$\xi^1 = bpx^1 + qx^2 + A\,(x^4 \mid r\,,\rho) \qquad \xi^2 = bpx^2 - qx^1 + B\,(x^4 \mid s\,,\sigma) \tag{4}$$

$$\xi^3 = C\,(x^4 \mid r\,,\rho)\,x^1 + D\,(x^4 \mid s\,,\sigma)\,x^2 + bpx^3 + t \qquad \xi^4 = p$$

dove $p\,,q\,,r\,,s\,,\rho\,,\sigma\,,t$ sono 7 indipendenti costanti di integrazione (e ciò conferma che il gruppo di movimenti della (1) ha dimensione 7); le funzioni $A\,,B\,,C\,,D$ sono opportune funzioni di x^4, lineari e omogenee nelle costanti indicate per ognuna di esse. L'espressione di queste funzioni dipende dal segno della quantità $b^2 - 8\,a$.

Indichiamo con $\xi\,(x^1, x^2, x^3, x^4 \mid p\,,q\,,\cdots,t)$ la soluzione (4); un calcolo diretto mostra che:

$$[\xi\,(x^1,\cdots,x^4 \mid p\,,q\,,\cdots,t)\,,\,\xi\,(x^1,\cdots,x^4 \mid \bar{p}\,,\cdots,\bar{t})] = \tag{5}$$

$$\xi\,(x^1,\cdots,x^4 \mid \bar{\bar{p}}\,,\bar{\bar{q}}\,,\cdots,\bar{\bar{t}})$$

dove $\bar{\bar{p}} = \bar{\bar{q}} = 0$, mentre le altre costanti $\bar{\bar{r}}\,,\bar{\bar{s}}\,,\,,\,,\bar{\bar{t}}$ sono opportune combinazioni di $p\,,\bar{p}\,,q\,,\bar{q}\,,r\,,\bar{r}\,,s\,,\bar{s}\,,\,,\,,\,,\,,t\,,\bar{t}$.

Notiamo che il campo di isometrie infinitesimali $\vec{\xi}$ corrispondente ai valori dei parametri $p = q = r = s = \rho = \sigma = 0\,, t = 1$, è costituito da vettori di lunghezza zero e le sue linee integrali $x^1 = \text{cost}\,, x^2 = \text{cost}\,, x^3 = x^3_0 + t$, $x^4 = \text{cost}$ sono geodetiche di lunghezza nulla. Questa osservazione interverrà nella descrizione del nostro modello elettromagnetico.

II. Equazioni di campo

Consideriamo le equazioni di campo di Einstein:

$$G_{ik} + \Lambda g_{ik} = \mathscr{H} \tau_{ik} \tag{6}$$

dove $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}$ è il tensore di Einstein Levi–Civita (che, nel nostro caso coincide con il tensore di Ricci), Λ è la costante cosmologica, $\mathscr{H}$ è la costante gravitazionale einsteiniana e τ_{ik} è il tensore energia impulso rappresentante lo schema campo elettromagnetico puro, così definito: (e.g. [3], p. 17)

$$\tau_{ik} \equiv F_{i\sigma} F_k^\sigma - \frac{1}{4} g_{ik} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}. \tag{7}$$

Le F_{ik} sono le componenti del tensore antisimmetrico campo elettromagnetico. Se con J^k indichiamo le componenti del 4–vettore corrente elettrica, allora F_{ik} e J^k devono verificare le equazioni relativistiche dell'elettromagnetismo di Maxwell (e.g. [1], pp. 44):

$$dF = 0 \quad , \quad \nabla_i F^{ik} = \chi J^k \tag{8}$$

dove

$$F \equiv \frac{1}{2} F_{ik}\, dx^i \wedge dx^k. \tag{9}$$

Supponiamo ora che le equazioni (6) siano soddisfatte; allora possiamo determinare gli autovalori s del tensore τ_{ik} rispetto al tensore metrico g_{ik} che, come è noto, sono le radici dell'equazione caratteristica:

$$\det \| \tau_{ik} - s g_{ik} \| = 0 . \tag{10}$$

Tenuto conto dalla (6) e dei valori trovati per R ed R_{ik}, la (10) si riduce alla forma:

$$(s - \Lambda/\mathscr{H})^4 g_{11}^2 g_{34}^2 = 0 \tag{11}$$

dalla quale risulta l'esistenza di un unico autovalore quadruplo

$$s_i = \Lambda/\mathscr{H} \qquad i = 1, 2, 3, 4 . \tag{12}$$

D'altra parte è noto (e.g. [1], pp. 20) che il tensore energia impulso di un campo elettromagnetico puro ammette quattro autovalori reali, a due a due uguali e di segno opposto. Dalla (12) segue allora $s^i = 0$ e quindi necessariamente $\Lambda = 0$. Abbiamo così ottenuto il primo risultato:

Proposizione I. *Affinché il tensore fondamentale di tipo* (1) *possa essere generato da un campo elettromagnetico puro è necessario ammettere l'annullarsi della costante cosmologica* Λ. *Subordinatamente a tale ipotesi il campo elettromagnetico risulta necessariamente essere un campo singolare.*

Dalla teoria generale (e.g. [1], pp. 21), si sa che per un campo elettromagnetico puro singolare può porsi:

$$\tau_{ik} = \eta^2 l_i l_k \tag{13}$$

essendo η un campo scalare ed l_i un campo di vettori di norma nulla, le cui linee sono geodetiche di V^4.

Nel caso nostro i valori di l_i e η che soddisfano la (13) sono:

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0 \quad , \quad \eta l_4 = \pm \sqrt{4\, a/\mathcal{H}}$$

mentre le sue componenti controvarianti sono:

$$l^1 = l^2 = l^4 = 0 \quad , \quad \eta l^3 = \pm\, e^{bx^4} \sqrt{4\, a/\mathcal{H}}\,.$$

Abbiamo dunque il seguente risultato:

PROPOSIZIONE II. *Se il tensore fondamentale definito dalla* (1) *è generato da un campo elettromagnetico puro* (*singolare*), *allora è necessariamente* $a > 0$ *e il vettore* $\vec{l}$, *associato al campo elettromagnetico* F, *è ovunque collineare al vettore* $\vec{h}(x)$ *di componenti* $h^1 = h^2 = h^4 = 0\,,\, h^3 = 1$.

Come già si è detto nel Par. 1, le traiettorie del campo di vettori $\vec{h}$ sono geodetiche di lunghezza nulla e orbite di un gruppo di isometrie di dimensione 1.

Passiamo ora a risolvere esplicitamente le equazioni di Einstein–Maxwell tenendo conto delle condizioni necessarie già riconosciute: $\Lambda = 0$, $a > 0$.

Cominciamo con le equazioni di Einstein (6) per il modello campo elettromagnetico puro e tensore fondamentale (1). Converremo di indicare con $E(i\,,k)$ l'equazione di Einstein (6) corrispondente alla coppia di indici $(i\,,k)$.

Essendo $G_{33} = 0$, l'equazione $E(3\,,3)$ si scrive:

$$\text{(14)} \qquad E(3\,,3) \equiv g^{11}\left[(F_{13})^2 + (F_{23})^2\right] = 0 \quad , \quad \Rightarrow F_{13} = F_{23} = 0\,.$$

Una volta soddisfatte le equazioni (14), le equazioni $E(1\,,2)\,,E(1\,,3)$, $E(2\,,3)$ si riducono a identità.

L'equazione $E(1\,,1)$ si scrive:

$$\text{(15)} \qquad E(1\,,1) \equiv \tfrac{1}{2} g^{11} (F_{12})^2 + \tfrac{1}{2} g_{11} (g^{34})^2 (F_{34})^2 = 0 \quad ; \quad \Rightarrow F_{12} = F_{34} = 0\,.$$

Tenendo conto delle (14) e (15), anche le equazioni $E(2\,,2)\,,E(1\,,4)\,,E(2\,,4)$, $E(3\,,4)$, sono automaticamente verificate.

Non rimane ormai che l'equazione $E(4\,,4)$ che, tenuto conto di (14) e (15) può scriversi:

$$\text{(16)} \qquad (4\, a/\mathcal{H})\, e^{-2bx^4} = (F_{14})^2 + (F_{24})^2.$$

Passiamo adesso al primo gruppo delle equazioni di Maxwell $(8)_1$. Alcune di esse si riducono a identità per effetto di (14) e (15); rimane solamente

$$d\,(F_{14}\, dx^1 \wedge dx^4 + F_{24}\, dx^2 \wedge dx^4) = 0$$

ossia

$$\partial_2 F_{14} - \partial_1 F_{24} = 0 \quad , \quad \partial_3 F_{14} = 0 \quad , \quad \partial_3 F_{24} = 0 \, . \tag{17}$$

Le $(17)_2$ e $(17)_3$ dicono che F_{14} e F_{24} non dipendono da x^3.

Dato che $\mathbf{R}^4$ è semplicemente connesso, il tensore campo elettromagnetico F_{ik} deriva dunque da un potenziale vettoriale φ_i, $i = 1, \cdots, 4$:

$$F_{ik} = \partial_i \varphi_k - \partial_k \varphi_i \, . \tag{18}$$

Limitando la considerazione ai soli valori 1, 2, 3 degli indici e tenendo conto che $F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0$, si ha

$$\partial_\rho \varphi_\tau = \partial_\tau \varphi_\rho \qquad (\rho, \tau = 1, 2, 3) \tag{19}$$

da cui si ricava che

$$\varphi_\rho = \partial_\rho \varphi \tag{20}$$

φ essendo una funzione scalare di x^1, x^2, x^3, x^4 definita in $\mathbf{R}^4$. Ancora la (18) per $i = 3$, $k = 4$, ricordando che $F_{34} = 0$, dà

$$\partial_3 \varphi_4 = \partial_4 \varphi_3 \tag{21}$$

da cui si deduce

$$\varphi_3 = \partial_3 \psi \quad , \quad \varphi_4 = \partial_4 \psi \tag{22}$$

ψ essendo una funzione scalare di x^1, x^2, x^3, x^4 definita su $\mathbf{R}^4$. Dal confronto tra la (20) scritta per $\rho = 3$ e la $(22)_1$ si trae che la funzione

$$\theta \equiv \varphi - \psi \tag{23}$$

non dipende da x^3: $\theta = \theta(x^1, x^2, x^4)$; in pari tempo la $(22)_2$ può anche scriversi $\varphi_4 = \partial_4 \varphi - \partial_4 \theta$.

Delle (18) rimangono ancora da considerare quelle di indice (1, 4) e (2, 4) che, tenuto conto di (20), (22), (23), si scrivono rispettivamente:

$$F_{14} = - \partial_1 \partial_4 \theta \qquad F_{24} = - \partial_2 \partial_4 \theta \, . \tag{24}$$

Posto ancora $\lambda(x^1, x^2, x^4) = - \partial_4 \theta$ le (24) si possono anche scrivere

$$F_{14} = \partial_1 \lambda \quad , \quad F_{24} = \partial_2 \lambda \, . \tag{25}$$

Sostituendo le (25) nella (16) e posto ulteriormente $\tilde{\lambda} = \lambda e^{bx^4} / \sqrt{4a/\mathscr{H}}$ questa diviene

$$(\partial_1 \tilde{\lambda})^2 + (\partial_2 \tilde{\lambda})^2 = 1 \, . \tag{26}$$

Da quanto precede risulta che le equazioni di Einstein (6) e le equazioni di Maxwell $(8)_1$ risultano compatibili purché, oltre a $\Lambda = 0$, $a > 0$, sia $F_{12} = F_{13} = F_{23} = F_{34} = 0$ e F_{14}, F_{24} derivanti da un potenziale λ, dipendente da x^1, x^2, x^4 purché quest'ultimo soddisfi all'equazione (26).

Rimane ancora da soddisfare alle equazioni di Maxwell non omogenee $(8)_2$ ma queste si possono interpretare come le equazioni che forniscono il vettore corrente elettrica.

Un calcolo diretto mostra che:

$$J^1 = J^2 = J^4 = 0$$

$$J^3 = \frac{1}{\chi} \sqrt{a/\mathscr{H}}\, e^{2bx^4} (\partial_1 \partial_1 \tilde{\lambda} + \partial_2 \partial_2 \tilde{\lambda}) .$$

D'altra parte, poiché il tensore fondamentale è generato da un campo elettromagnetico puro, anche la componente J^3 del vettore corrente elettrica deve risultare nulla e dunque il potenziale $\tilde{\lambda}(x^1, x^2, x^4)$ deve soddisfare oltre che all'equazione (26) anche all'equazione

$$\partial_1 \partial_1 \tilde{\lambda} + \partial_2 \partial_2 \tilde{\lambda} = 0 . \tag{27}$$

La (27) è l'equazione di Laplace nelle variabili x^1, x^2. Si sa che la soluzione generale della (27) è la parte reale di una funzione analitica f di variabile complessa $z = x^1 + ix^2$, tenendo conto che la funzione può dipendere anche dalla variabile x^4, risulta che i coefficienti della funzione complessa sono funzioni differenziabili di x^4:

$$f(x^1, x^2, x^4) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x^4)(x^1 + ix^2)^n . \tag{28}$$

Osservando che

$$\tilde{\lambda}(x^1, x^2, x^4) = \tfrac{1}{2}\,[f(x^1, x^2, x^4) + \bar{f}(x^1, x^2, x^4)] \tag{29}$$

dove $\bar{f}(x^1, x^2, x^4)$ è la coniugata di $f(x^1, x^2, x^4)$, l'equazione (26) si scrive

$$\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 1 . \tag{30}$$

L'equazione (30) si scrive esplicitamente

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x^4)\, z^{n-1}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} m a_m(x^4)\, z^{m-1}\right) = 1 . \tag{31}$$

Identificando i termini omogenei a primo e a secondo membro di (31) risulta:

$$\tilde{\lambda}(x^1, x^2, x^4) = v(x^4) + x^1 \cos u(x^4) - x^2 \sin u(x^4) \tag{32}$$

con $u(x^4)$, $v(x^4)$ funzioni differenziabili arbitrarie di x^4.

La (32) costituisce dunque la soluzione generale del sistema (26), (27). Riassumendo abbiamo il seguente

TEOREMA I. *Esiste un modello campo elettromagnetico puro singolare realizzato sullo spaziotempo* $\mathbf{R}^4$ *munito del tensore fondamentale* (1) $(a > 0)$, *il cui tensore campo elettromagnetico ha le seguenti componenti*:

$$F_{12} = F_{13} = F_{23} = F_{34} = 0 ,$$

$$F_{14} = \sqrt{a/\mathscr{H}}\; e^{-bx^4} \cos u\,(x^4) \quad , \quad F_{24} = -\sqrt{a/\mathscr{H}}\; e^{-bx^4} \sin u\,(x^4)$$

dove u è una funzione differenziabile arbitraria di x^4.

Proponiamoci ora di vedere se il tensore campo elettromagnetico risulta invariante rispetto al gruppo di isometrie della metrica (1). Condizione necessaria e sufficiente affinché il tensore F sia invariante al gruppo di isometrie generato dal campo di Killing $\vec{\xi}$, (4) è che la derivata di Lie di F secondo $\vec{\xi}$ sia nulla, cioè, in termini di componenti:

$$(\mathscr{L}_\xi F)_{ij} \equiv \xi^r \partial_r F_{ij} + F_{rj} \partial_i \xi^r + F_{ir} \partial_j \xi^r = 0 . \tag{33}$$

Un calcolo diretto mostra che:

$$(\mathscr{L}_\xi F)_{ij} = 0 \qquad \text{per } (i , j) \neq (1 , 4) , (2 , 4) \qquad\qquad i < j$$

$$(\mathscr{L}_\xi F)_{14} = -\sin u\,(x^4)\,(pu'\,(x^4) + q)$$

$$(\mathscr{L}_\xi F)_{24} = \cos u\,(x^4)\,(pu'\,(x^4) + q) .$$

Da ciò si deduce che F è invariante al gruppo di isometrie generato dal campo $\vec{\xi}$ se e solo se

$$pu'\,(x^4) + q = 0 . \tag{34}$$

La (34) mostra che il tensore F non è invariante rispetto a tutto il gruppo delle isometrie della metrica. Distinguiamo i due casi:

$$p = 0 \quad , \quad p \neq 0 .$$

Caso A) $p = 0$; dalla (34) risulta $q = 0$ e $u\,(x^4)$ arbitraria. La dimensione del gruppo di isometrie che lascia invariante il tensore F è dunque 5.

Caso B) $p \neq 0$; risulta ora che

$$u'\,(x^4) = -q/p .$$

Dunque

$$u\,(x^4) = \alpha x^4 + \beta \tag{35}$$

con α , β costanti; p e q sono collegati dalla relazione

$$p\alpha + q = 0 . \tag{36}$$

In conseguenza il campo elettromagnetico F è invariante rispetto a un gruppo di isometrie di dimensione 6 generato dai campi di Killing (4) che soddisfano la relazione (36).

Ne segue il:

TEOREMA II. *Se la funzione* $u(x^4)$ *che interviene nel campo elettromagnetico ha la forma* (35), *allora* F *è invariante rispetto a un sottogruppo di dimensione* 6 *del gruppo di isometrie della metrica. Se invece* $u(x^4)$ *non è una funzione lineare, il gruppo di invarianza di* F *ha soltanto dimensione* 5.

BIBLIOGRAFIA

[1] LICHNEROWICZ A. (1955) – *Théories relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme.* Masson Editeur.

[2] ROBERTSON H. P. e NOONAN T. W. (1969) – *Relativity and Cosmology.* W. B. Saunders Company.

[3] TELEMAN N. (1968) – *Clasificarea spatiilor riemanniene* V_4 *omogene de tip relativist*, « Stud. Cerc. Mat. », *1*, 67–125.