
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

LEONIDA EUGENIO KRIVOSHEIN, DEMETRIO MANGERON,
MEHMET NAMIK OGUZTÖRELI

**Sulla capacità di determinazione delle soluzioni di un
sistema costituito da certe equazioni
integro—differenziali non lineari di dimensioni
diverse tra di loro e con derivate totali di Picone**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 59 (1975), n.1-2, p. 14-21.*
Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_1-2_14_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_1-2_14_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sulla capacità di determinazione delle soluzioni di un sistema costituito da certe equazioni integro-differenziali non lineari di dimensioni diverse tra di loro e con derivate totali di Picone.* Nota (*) di LEONIDA EUGENIO KRIVOSHEIN ⁽¹⁾, DEMETRIO MANGERON ⁽²⁾ e MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI ⁽³⁾, presentata dal Socio M. PICONE.

*All'Illustre geometra belga Lucien Godeaux
con infinito rimpianto*

RÉSUMÉ. — Les Auteurs, tout en continuant la série de leurs travaux consacrés à l'étude de différents systèmes différentiels possédant la structure complexe [1]–[4], dont le sujet a été proposé par l'Académie Royale des Sciences de Belgique, exposent dans ce qui suit des théorèmes d'existence, d'unicité, de stabilité et d'évaluation des erreurs commises, si l'on se ferme à des solutions approchées, concernant un système constitué des équations intégrodifférentielles non linéaires de dimensions différentes et aux opérateurs de dérivées totales de Picone [5]–[8].

1. Il rapidissimo aumento odierno dei modelli matematici vieppiù complicati di vari fenomeni della natura richiede assai spesso, come lo sottolinea E. C. Zeeman nella sua conferenza plenaria quale invitato al più recente Congresso Internazionale dei Matematici tenutosi a Vancouver [9], lo stabilirsi dei teoremi di esistenza e di unicità per un cospicuo numero di tali modelli che s'inquadrano oggi nel tema di studio dei sistemi differenziali di struttura composita proposto dalla Reale Accademia delle Scienze del Belgio. Gli Autori, continuando la loro serie di lavori dedicati all'esame di vari sistemi differenziali con struttura composita [1]–[4], espongono in ciò che segue teoremi di esistenza, di unicità, di stabilità e di valutazione degli errori commessi se ci si ferma alle soluzioni approssimate concernenti un tale sistema, costituito da certe equazioni integro-differenziali non lineari, di dimensioni diverse tra di loro e contenente operatori di derivate totali di Picone [5]–[8].

(*) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1975.

(1) Università di Stato della R. S. S. Kirgizia, Frunze, U.R.S.S.

(2) Istituto Politecnico di Iași, Romania. In presente: prof. invitato, Dept. of Computer Science, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada.

The author wishes to express his warmest thanks for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of the University of Alberta and subsequently in the Department of Computer Science of the Concordia University of Montreal.

(3) Dept. of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta. The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada under Grant NRC-A4345.

2. Si consideri il seguente sistema di equazioni integro-differenziali non lineari in due e, rispettivamente, una sola variabile indipendente

$$(1) \quad M^2 [u(x, t)] = \\ = f \left[x, t, u(x, t), \int_a^{r[x, y(x)]} \mathcal{H}(x, t, \xi, y(\xi), u(\xi, t)) d\xi, \int_a^{s[t, z(t)]} N(x, t, \tau, z(\tau), u(x, \tau)) d\tau \right] \equiv \\ \equiv A[y, z, u],$$

$$(2) \quad y(x) = F \left[x, y(x), \int_a^{r[x, y(x)]} Q(x, \xi, y(\xi)) d\xi \right] \equiv B[y],$$

le funzioni incognite $u(x, t)$ e $y(x)$ essendovi sottoposte alle condizioni di frontiera

$$(3) \quad \begin{cases} u(x, \alpha) = \varphi[x, y(x)], & u(a, t) = \psi \left[t, \int_a^b P(t, \xi, y(\xi)) d\xi \right] = z(t), \\ u'_x(a, t) = \sigma[t, z(t)], & u'_t(x, \alpha) = \Delta[x, y(x)], \\ u(x, \alpha)|_{x=a} = u(a, t)|_{t=\alpha} = p_1, & [u'_x(a, t)]'_t|_{t=\alpha} = [u'_t(x, \alpha)]'_x|_{x=a} = \\ & = M[u(a, \alpha)] = p_2, \end{cases}$$

l'operatore $M^2[\cdot]$ è quello di derivata totale di second'ordine di Picone e $f(x, t, v_1, v_2, v_3)$, $\mathcal{H}(x, t, \xi, v_4, v_5)$, $r(x, v_6)$, $N(x, t, \tau, v_7, v_8)$, $s(x, v_9)$, $F(x, v_{10})$, $\Delta(x, v_{11})$, $\sigma(t, v_{12})$, $Q(x, \xi, v_{13})$, $P(x, \xi, v_{14})$ sono funzioni note, continue e lipschitziane rispetto ai parametri v_i ($i = \overline{1, 14}$) nel dominio

$$\mathcal{D} = \{a \leq x, \xi, r(x, v_6) \leq b, \alpha \leq t, \tau, s(t, v_9) \leq \gamma, 0 \leq |v_i| \leq r_i = \text{const}, \\ i = \overline{1, 14}\},$$

mentre le funzioni $\sigma(t, v_9)$, $F(x, v_{10})$ e $\Delta(x, v_{11})$ vi sono inoltre continuamente differenziabili rispetto a tutti i loro argomenti e la funzione $Q(x, \xi, v_{13})$ possiede la derivata continua rispetto ad x , $(x, \xi, v_{13}) \in \mathcal{D}$ e p_1, p_2 sono numeri costanti. Siano $L_{ij}(x, t)$, ($i = \overline{1, 3}$), $L_{j\mathcal{H}}(x, t, \xi)$, $L_{jN}(x, t, \tau)$, ($j = \overline{1, 2}$), $L_r(x)$, $L_s(x)$, $L_{iF}(x)$, ($i = \overline{1, 2}$), $L_Q(x, \xi)$, $L_P(t, \xi)$, $L_\Delta(x)$ e $L_\sigma(t)$ funzioni di Lipschitz corrispondenti, continue e non negative nel $\mathcal{D}$.

Esaminiamo la capacità di determinazione delle soluzioni $u(x, t) \in C^{2,2}[a, b] \times [\alpha, \gamma] \subset \mathcal{D}$ e $y(x) \in C^1[a, b] \subset \mathcal{D}$ del sistema (1)-(3).

3. ESAME DELL'EQUAZIONE INTEGRO-DIFFERENZIALE (2)

In seguito del fatto che l'operatore non lineare $B[\cdot]$ da luogo, per ogni paio di funzioni arbitrarie $\bar{y}_1(x)$, $\bar{y}_2(x)$ appartenenti alla classe $C^1[a, b] \subset \mathcal{D}$, all'ineguaglianza

$$(4) \quad \|B[\bar{y}_2] - B[\bar{y}_1]\| \leq \\ \leq \left\| L_{1F}(x) + L_{2F}(x) \left[\int_a^{r[x, \bar{y}_1(x)]} L_Q(x, \xi) d\xi + L_r(x) \|Q(x, \xi, v_8)\| \right] \right\| \cdot \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\| \equiv \\ \equiv k_1 \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|,$$

si conclude che l'esistenza e l'unicità di una soluzione $y(x) \in \mathcal{D}$, continua e continuamente differenziabile è assicurata non appena sia soddisfatta la condizione $k_1 < 1$ e tale soluzione può essere costruita tramite la successione

$$(5) \quad y_n(x) = B[y_{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x),$$

poiché

$$(6) \quad \|y_n(x) - y(x)\| \leq k_1^n \|y_0(x) - B[y_0]\| : (1 - k_1) \equiv R_n^1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n^1 = 0.$$

4. STUDIO DEL PROBLEMA INTEGRO-DIFFERENZIALE (1), (3)

Una volta costruita, nelle condizioni di cui sopra, la soluzione $y(x)$ dell'equazione (2), trasformiamo il sistema (1), (3) nell'equazione integrale equivalente

$$(7) \quad u(x, t) = \varphi[x, y(x)] + \psi \left[t, \int_a^b P(t, \xi, y(\xi)) d\xi \right] - p_1 + \{\sigma[t, z(t)] - \\ - \sigma[\alpha, z(\alpha)]\} (x - a) + \{\Delta[x, y(x)] - \Delta[\alpha, y(\alpha)]\} (t - \alpha) - (x - a)(t - \alpha) p_2 + \\ + \int_a^x \int_\alpha^t (x - \eta)(t - \theta) A[y, z, u] d\theta d\eta \equiv H[y, z, u].$$

Siccome, per ogni paio di funzioni $\bar{u}_1(x, t)$, $\bar{u}_2(x, t)$ continue nel $\mathcal{D}$, l'operatore $H[\cdot]$ soddisfa all'ineguaglianza

$$(8) \quad \|H[y, z, \bar{u}_2] - H[y, z, \bar{u}_1]\| \leq \\ \leq \left\| \int_a^x \int_\alpha^t (x - \eta)(t - \theta) \left\{ L_{1f}(\eta, \theta) + L_{2f}(\eta, \theta) \int_a^{r[\eta, y(\eta)]} L_{2x}(\eta, \theta, \xi) d\xi + \right. \right. \\ \left. \left. + L_{3f}(\eta, \theta) \int_\alpha^{s[\theta, z(\theta)]} L_{2N}(\eta, \theta, \tau) d\tau \right\} d\theta d\eta \right\| \cdot \|\bar{u}_2 - \bar{u}_1\| \equiv k_2 \cdot \|\bar{u}_2 - \bar{u}_1\|,$$

si può enunciare il seguente

TEOREMA 1. Il sistema integro-differenziale non lineare (1), (2) possiede, nelle ipotesi di cui sopra, per $k_2 < 1$ che ci assicura la validità nel $\mathcal{D}$ del principio di punto fisso di Banach, una soluzione ed una sola, $u(x, t) \in C^{2,2}[a, b] \times [a, \gamma]$, e tale soluzione si ottiene a meno di un $\varepsilon > 0$ prefissato, tenendo presente l'ineguaglianza

$$(9) \quad \|u(x, t) - u_i(x, t)\| \leq k_2^i \|u_0(x, t) - H[y, z, u_0]\| : (1 - k_2) \equiv k_2^i \cdot r_0,$$

non appena si prende

$$i > \ln(\varepsilon : r_0) : \ln k_2,$$

essendo

$$(10) \quad u_i(x, t) = H[y, z, u_{i-1}], \quad i = 1, 2, \dots,$$

in seguito al processo

$$\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x, t) = u(x, t).$$

5. IL PROBLEMA ANALOGO AD (1), (2) CORRISPONDENTE AD UNA SOLUZIONE APPROSSIMANTE $y_n(x)$

Procedendo in modo affatto analogo a ciò che si è fatto sin'ora, si conclude che, per $k_1 < 1$, il nuovo sistema integro-differenziale non lineare

$$(11) \quad \begin{aligned} M^2[w(x, t)] = \\ = f\left[x, t, w(x, t), \int_a^{r[x, y_n(x)]} \mathcal{K}(x, t, \xi, y(\xi), w(\xi, t)) d\xi, \right. \\ \left. \int_a^{s[t, z_n(t)]} N(x, t, \tau, z_n(\tau), w(x, \tau)) d\tau\right], \end{aligned}$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} w(x, \alpha) &= \varphi[x, y_n(x)], w(a, t) = z_n(t) = \psi\left[t, \int_a^b P(t, \xi, y_n(\xi)) d\xi\right], \\ w'_x(a, t) &= \sigma[t, z_n(t)], w'_t(x, \alpha) = \Delta[x, y_n(x)], \\ w(x, a)|_{x=a} &= w(a, t)|_{t=\alpha} = p_3, [w'_x(a, t)]'_t|_{t=\alpha} = \\ &= [w'_t(x, \alpha)]'_x|_{x=a} = M[w(a, \alpha)] = p_4 \end{aligned} \right.$$

possiede, per

$$(13) \quad k_{2n} = \left\| \int_a^x \int_\alpha^t (\eta - x) (\theta - t) x \right. \\ \left. \left\{ L_{1f}(\eta, \theta) + L_{2f}(\eta, \theta) \int_a^{r[\eta, y_n(\eta)]} L_{2\mathcal{K}}(\eta, \theta, \xi) d\xi + L_{3\mathcal{K}} \int_\alpha^{s[\theta, z_n(\theta)]} L_{2N}(\eta, \theta, \tau) d\tau \right\} d\theta dy \right\| < 1,$$

una soluzione ed una sola $w(x, t) \in C^{2,2}[a, b] \times [\alpha, \gamma] \subset \mathcal{D}$ e questa soluzione può essere costruita tramite il metodo di approssimazioni successive

$$(14) \quad w_k(x, t) = H[y_n, z_n, w_{k-1}], \quad k = 1, 2, \dots$$

avendosi finalmente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w_k(x, t) = w(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathcal{D}.$$

6. DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI $u(x, t)$ e $w(x, t)$

In questo ordine di idee si perviene all'ineguaglianza

$$\begin{aligned} & \|u(x, t) - w(x, t)\| = \|H[y, z, u] - H[y_n, z_n, w]\| \leq \\ & \leq \left\| L_\varphi(x) + L_\psi(t) \int_a^b L_P(t, \xi) d\xi + \left[L_\sigma(t) L_\psi(t) \int_a^b L_P(t, \xi) d\xi + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + L_\sigma(\alpha) L_\psi(\alpha) \int_a^b L_P(\alpha, \xi) d\xi \right] (x - a) + \right. \\ & \quad \left. + [L_\Delta(x) + L_\Delta(\alpha)] (t - \alpha) \right\| \cdot \|y(x) - y_n(x)\| + \|p_1 - p_3\| + \\ & \quad + (b - a) (\gamma - \alpha) |p_4 - p_2| + \\ & \quad + \left\| \int_a^x \int_\alpha^t (x - \eta) (\theta - t) \left\{ L_{1f}(\eta, \theta) |u(\eta, \theta) - w(\eta, \theta)| + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + L_{2f}(\eta, \theta) \left\{ \int_a^{r[\eta, y_n(\eta)]} [L_{1\mathcal{K}}(\eta, \theta, \xi) |y(\xi) - y_n(\xi)| + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + L_{2\mathcal{K}}(\eta, \theta, \xi) |u(\xi, \theta) - w(\xi, \theta)| \right] d\xi + L_r(\eta) |y(\eta) - \right. \\ & \quad \left. \left. - y_n(\eta)| \right\} \mathcal{K}(\eta, \theta, \xi, v_3, v_1) \right\| \Big\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + L_{3f}(\eta, \theta) \left\{ \int_{\alpha}^{s[\theta, z_n(\theta)]} \left[L_{1N}(\eta, \theta, \tau) L_{\psi}(\tau) \int_a^b L_P(\tau, \xi) d\xi \|y - y_n\| + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + L_{2N}(\eta, \theta, \tau) \|u - w\| \right] d\tau + \right. \\
& \left. + L_s(\theta) L_{\psi}(\tau) \int_a^b L_P(\tau, \xi) d\xi \|y - y_n\| \cdot \|N(\eta, \theta, \tau, v_6, v_7)\| \right\} d\theta d\eta \Big\| \leq \\
& \leq k_4 \|y - y_n\| + k_5 \|u - w\|,
\end{aligned}$$

ove k_4, k_5 sono numeri reali noti, e ne risulta pertanto, per $k_5 < 1$,

$$(15) \quad \|u(x, t) - w(x, t)\| \leq k_4 R_n^1 : (1 - k_5).$$

7. Si consideri adesso, essendovi valide le disequaglianze di qui sopra, una soluzione approssimante l'unica soluzione $w(x, t)$ del sistema (11), (12) e sia (14) $w_k(x, t) = H[y_n, z_n, w_{k-1}]$, $k = 1, 2, \dots$, tale soluzione. Si ottiene allora

$$(16) \quad \|w(x, t) - w_k(x, t)\| \leq k_2^k \|w_0(x, t) - H[y_n, z_n, w_0]\| : (1 - k_2) \equiv R_n^k$$

e si ha per conseguenza, dalle (15) e (16),

$$\begin{aligned}
(17) \quad \|u(x, t) - w_k(x, t)\| & \leq \|u(x, t) - w(x, t)\| + \|w(x, t) - w_k(x, t)\| \leq \\
& \leq R_n + R_n^k, \quad \lim_{n, k \rightarrow \infty} (R_n + R_n^k) = 0.
\end{aligned}$$

Le (15) e (17) permettono di valutare la correttezza della soluzione del problema (1)-(3) di fronte alla funzione $y(x)$.

8. STUDIO DELLA STABILITÀ DEL PROBLEMA (1)-(3)

Si considerino, per fissare le idee, le «perturbazioni» delle funzioni $\sigma(t, v_9)$ e $\Delta(x, v_8)$ tali che si abbia

$$|\sigma(t, v_9) - \sigma_1(t, v_9^*)| \leq l_1(t) + l_2(t) |v_9 - v_9^*|,$$

$$|\Delta(x, v_8) - \Delta_1(x, v_8^*)| \leq l_3(x) + l_4(x) |v_8 - v_8^*|,$$

ove $v_8^*, v_9^* \in \mathcal{D}$ e $l_i(t), l_{2+i}(x)$ ($i = 1, 2$) sono funzioni note, continue e non negative nel dominio $\mathcal{D}$, mentre si conservano tali e quali le altre funzioni note che figurano nel sistema (1)-(3). Il sistema «perturbato», essendo $g(x, t)$ la nuova funzione incognita, si scrive

$$(18) \quad M^2[g(x, t)] = A[y, z, g],$$

$$(19) \quad \begin{cases} g(x, \alpha) = \varphi[x, y(x)], g(a, t) = z(t) = \psi \left[t, \int_a^b P(t, \xi, y(\xi)) d\xi \right], \\ g'_x(a, t) = \sigma_1(t, z(t)), g'_t(x, \alpha) = \Delta_1[x, y(x)], \\ g(x, \alpha)|_{x=a} = g(a, t)|_{t=a} = p_1, [g'_x(a, t)]'_{t=\alpha} = [g'_t(x, \alpha)]'_{x=\alpha} = \\ = M[g(a, \alpha)] = p_2^1. \end{cases}$$

Prendendo in esame l'equazione integrale non lineare equivalente al sistema (18), (19).

$$(20) \quad g(x, t) = \varphi[x, y(x)] + \psi \left[t, \int_a^b P(t, \xi, y(\xi)) d\xi \right] - p_1 + \\ + \{ \sigma_1(t, z(t)) - \sigma_1(\alpha, z(\alpha)) \} (x - a) + \{ \Delta_1[x, y(x)] - \Delta_1[a, y(a)] \} (t - \alpha) - \\ - (x - a)(t - \alpha) p_2^1 + \int_a^x \int_\alpha^t (x - \eta)(t - \theta) A[y, z, g] d\theta d\eta,$$

se ne deduce il seguente

TEOREMA 2. *Nelle condizioni di cui sopra il problema perturbato (18), (19) possiede, per $k_2 < 1$, una soluzione ed una sola $g(x, t) \in C^{2,2}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$ ed il modulo della deviazione tra la soluzione perturbata $g(x, t)$ e quella iniziale $u(x, t)$ soddisfa alle ineguaglianze*

$$\|u(x, t) - g(x, t)\| \leq \|l_1(t)(x - a) + l_3(x)(t - \alpha)\| + \\ + (b - a)(\gamma - \alpha) |p_2 - p_2^1| + k_2 \|u(x, t) - g(x, t)\| \equiv T + k_2 \|u - g\|$$

e

$$(21) \quad \|u(x, t) - g(x, t)\| \leq T : (1 - k_2)$$

e pertanto decresce simultaneamente con i moduli delle funzioni $\|l_1(t)\|, \|l_3(x)\|$ e con il valore assoluto della differenza $|p_2 - p_2^1|$.

Osservazioni. 1) La determinazione delle soluzioni approssimate dei sistemi di cui sopra può essere conseguita con vari altri metodi, come, per esempio, il metodo escogitato dall'A. Kutanov [10].

2) Si può pervenire alle equazioni integrali equivalenti coi sistemi ora esaminati utilizzando i procedimenti esposti nella Nota [11].

3) In uno dei nostri prossimi lavori da inserirsi nel *Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iași* si esporranno, oltre alcuni dettagli algoritmici e qualche

nuovo risultato concernente il sistema differenziale con strutture composite (1)–(3), i programmi del calcolo delle soluzioni di certi sistemi particolarizzati del tipo (1), (2), (3) ma pur contenenti funzioni incognite nei limiti d'integrazione, facendo uso delle calcolatrici elettroniche.

4) Si suppone che gli operatori A , B , H trasformano i domini corrispondenti nelle loro parti.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. E. KRIVOSHEIN, D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI (1973) – *Problemi di correttezza delle soluzioni esatte ed approssimative dei sistemi integro-differenziali non lineari a derivate parziali*, « Rend. Accad. Sci. fis., mat., Napoli », 40 (4), 127–133.
- [2] L. E. KRIVOSHEIN, K. V. LEUNG, D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI (1972) – *Systèmes différentiels possédant la structure complexe. I. Sur l'unicité, la stabilité et l'approximation des solutions de certains systèmes integro-différentiels non linéaires aux opérateurs différentiels ordinaires et hyperboliques*, « Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg. », 58 (5), 1307–1315.
- [3] L. E. KRIVOSHEIN, D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI (1972) – *Mathematical Systems with mixed structures. I. On the solution of systems of integro-differential equations with ordinary and thermic differential operators*, « Bull. Polytechn. Inst. Jassy », New series, 18 (1–2), 21–27.
- [4] L. E. KRIVOSHEIN, D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI (1972) – *Systèmes mathématiques aux structures entremêlées. Nouveaux problèmes « bien posés » concernant certaines équations intégrodifférentielles non linéaires aux arguments retardés contenant l'autoréglage sous forme d'une intégrale*, « Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg. », 58 (5), 841–847.
- [5] M. PICONE, *Mauro Picone*. Nel volume « Duodecim Doctorum Virorum Vitae et Operum Notitia ». Pontificia Academia Scientiarum, A. D. MCMLXX, 118–146.
- [6] D. MANGERON e L. E. KRIVOSHEIN (1963) – *Problemi concernenti varie equazioni integro-differenziali con derivate totali di Picone*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », 33, 226–266; 34 (1964), 344–368; 35 (1965), 341–364.
- [7] S. EASWARAN, D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI (1972) – *Problèmes aux limites pour certains systèmes différentiels aux différences et aux dérivées totales au sens de M. M. Picone*, « Archivum Mathematicum », 3 (8), 131–136.
- [8] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI (1971) – *Mathematical systems of mixed structures. On the solutions of a class of nonlinear integro-differential functional equations*, « Soviet Mathematics, Doklady » (U.S.A.), 12, 118–120 (English translation from Russian).
- [9] E. C. ZEEMAN (1974) – *Levels of structure in catastrophe theory*. Invited Address. International Congress of Mathematicians, Vancouver, 16 pp.
- [10] L. E. KRIVOSHEIN, A. KUTANOV, K. V. LEUNG e M. N. OĞUZTÖRELI (1975) – *Systèmes différentiels possédant la structure complexe. Problèmes à la frontière aux conditions initiales fonctionnelles pour une classe d'équations intégrodifférentielles de Mangeron aux intégrales d'Urysohn*, « Bull. Soc. Math. Belg. » (sous presse—in stampa).
- [11] S. DZUNUZBEKOVA, L. E. KRIVOSHEIN, K. V. LEUNG e M. N. OĞUZTÖRELI (1974) – *Problèmes concernant différentes classes d'équation intégrodifférentielles non linéaires de Mangeron, I*, « Rend. Accad. Naz. Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat. », 56 (8), 151–156.