

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

RICCARDO CENERINI

**Dispersione idrodinamica di una sostanza inquinante  
nel terreno. Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 58 (1975), n.6, p. 898–910.*  
Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1975\\_8\\_58\\_6\\_898\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_6_898_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Idrodinamica.** — *Dispersione idrodinamica di una sostanza inquinante nel terreno.* Nota II di RICCARDO CENERINI (\*), presentata (\*\*) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — Analytical solutions of the hydrodynamic dispersion equation of a chemical in a porous saturated medium with water percolation, are obtained in radial and  $x$  geometry, considering different time behaviours of boundary concentration.

The results are extensions of solutions obtained in first part of the article.

Numerical results for some practical cases are presented graphically.

## 1. INTRODUZIONE

Nella prima parte di questo studio [1] è stata risolta l'equazione della dispersione idrodinamica di una sostanza inquinante in un ammasso poroso in geometria radiale, in presenza di un moto di filtrazione dell'acqua con portata radiale costante, ammettendo che nell'origine si abbia una concentrazione con andamento temporale tipo funzione gradino.

Questo problema ha un interesse pratico, per esempio, in relazione allo smaltimento di rifiuti liquidi tramite iniezione in pozzi profondi, attorno ai quali è utile conoscere il movimento della sostanza introdotta. Questa tecnica ha avuto una progressiva estensione a vari tipi di effluenti specie di origine industriale (acidi concentrati, sostanze caustiche, fosfati organici tossici, soluzioni concentrate di vari composti organici, cloruri, ecc.) dato che se esistono formazioni geologiche idonee, tale metodo richiede costi di installazione e di esercizio assai inferiori rispetto ad altre forme di trattamento degli effluenti.

Senza entrare nei dettagli di questa tecnica di smaltimento [2], ci si limita ad osservare che essa richiede la costruzione di un pozzo che può avere una profondità variabile da 300 m fino a oltre 2.000 m (anche se oggi viene ritenuta opportuna una profondità non inferiore a 800-900 metri).

Occorre progettare il pozzo in modo da garantire la protezione della falda che può essere attraversata nella perforazione e scegliere formazioni geologiche aventi, in profondità, porosità sufficiente in modo da non incorrere nel pericolo di intasamenti da parte dell'effluente.

Si può allora garantire lo smaltimento di una portata apprezzabile (si hanno esempi di pozzi che assorbono 1.000-1.500 litri al minuto) per periodi prolungati, applicando una modesta pressione alla bocca.

Attraverso periodiche analisi chimiche, e se del caso, di radioattività dell'acqua, è necessario mantenere sotto controllo una ampia regione attorno

(\*) Istituto di Idraulica dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta dell'11 giugno 1975.

alla zona di smaltimento, sia che questo venga effettuato con la tecnica suddetta o con altre forme quale il lagunaggio su una ampia superficie di terreno.

Dato che lo scarico degli effluenti nel terreno può avvenire con intensità variabile nel tempo, questa seconda parte dello studio è dedicata a ottenere per via analitica soluzioni più generali dell'equazione della dispersione (sia in geometria radiale che in geometria  $x$ ) che tengano conto di tale variabilità.

## 2. SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DELLA DISPERSIONE IDRODINAMICA IN GEOMETRIA RADIALE PER VARIE CONDIZIONI ALL'ORIGINE

Le ipotesi fatte nella prima parte dello studio, e che si assumono anche nel seguito, sono:

a) Il coefficiente di dispersione idrodinamica dell'ammasso poroso è indipendente dalla velocità di filtrazione dell'acqua (prevalenza della diffusione molecolare).

b) Il moto di filtrazione dell'acqua avviene con portata radiale costante.

Con tali ipotesi l'equazione della dispersione idrodinamica in geometria radiale, conto tenuto dell'assorbimento del terreno e dell'eventuale decadimento radioattivo della sostanza che diffonde, è [1]:

$$(I) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1 - u_1/k}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \lambda c$$

ove:

$c$  =  $c(r, t)$  è la concentrazione della sostanza.

$k$  =  $\frac{k_0}{1 + \alpha R}$  è il coefficiente di dispersione.

$\alpha R$  =  $\alpha \exp\left(\frac{\Delta G}{hTN_a}\right)$  è il termine che tiene conto dell'assorbimento della sostanza da parte del terreno essendo:

$\alpha$  = rapporto dell'area attiva delle particelle del terreno (ai fini dell'assorbimento) rispetto alla loro area totale.

$\Delta G$  = energia libera (Cal/mole) che è indice della affinità fra sostanza e terreno.

$N_a$  = numero di Avogadro.

$h$  = costante di Boltzmann.

$T$  = temperatura assoluta.

$\lambda$  = costante di decadimento radioattivo del nuclide.

$u_1$  =  $\frac{u_{10}}{1 + \alpha R} = \frac{U_{0r} \cdot r}{1 + \alpha R}$  ove  $U_{0r}$  è la velocità di filtrazione dell'acqua, inversamente proporzionale alla distanza  $r$  dall'origine.

Si ammetta che all'istante iniziale la concentrazione sia nulla ovunque:

$$(3) \quad c(r, t = 0) = 0.$$

Si consideri una concentrazione nell'origine crescente o decrescente nel tempo secondo l'espressione:

$$(4) \quad c(r = 0, t > 0) = c_1 e^{-\lambda t} \cdot t^\beta$$

della quale nella prima parte di questo studio si è considerato il caso  $\beta = 0$ .

Trasformando la (1) con Laplace rispetto al tempo:

$$\bar{c}(r, s) = \mathcal{L}[c(r, t)] = \int_0^\infty e^{-st} c(r, t) dt$$

si ricava:

$$(5) \quad \bar{c}(r, s) = BK_\nu \left( \sqrt{\frac{s+\lambda}{k}} r \right)$$

ove:

$$\nu = u_1/2 k;$$

$K_\nu$  è la funzione di Bessel modificata di ordine  $\nu$ ;

$B$  è una quantità indipendente da  $r$ .

Ammettendo  $\nu \neq 0$ , si ponga nella (5) per la quantità  $B$  l'espressione:

$$(6) \quad B = \frac{c_1 (s + \lambda)^\mu \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right)}{2^{\nu-1} k^{\nu/2} \Gamma(\nu)}$$

ove:

$\Gamma$  è la funzione gamma;

$\mu$  è un parametro connesso all'esponente  $\beta$  della (4), come si vedrà.

Con la posizione (6) la antitrasformata della (5) è data da [3]:

$$(7) \quad c(r, t) = \frac{c_1 e^{-\lambda t} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) k^{1/2} e^{-\frac{r^2}{8kt}}}{2^{\nu-1} k^{\nu/2} \Gamma(\nu) r t^{\mu+\frac{1}{2}}} W_{\mu+\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}}(r^2/4 kt)$$

ove si è indicato con  $W$  la funzione di Whittaker:

$$(8) \quad W_{\mu+\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}}(r^2/4 kt) = \frac{\Gamma(-\nu) M_{\mu+\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}}(r^2/4 kt)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} - \mu\right)} + \frac{\Gamma(\nu) M_{\mu+\frac{1}{2}, -\frac{\nu}{2}}(r^2/4 kt)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right)}$$

essendo:

$$(9) \quad M_{\alpha, \beta}(x) = x^{\frac{1}{2}+\beta} e^{-x/2} M\left(\frac{1}{2} + \beta - \alpha, 1 + 2\beta, x\right)$$

in cui:

$$(10) \quad M(a, b, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n y^n}{(b)_n n!}$$

è la funzione di Kummer (che è tabulata [4]), avendo indicato:

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$$

$$(a)_0 = 1$$

e analogamente per  $(b)_n$ .

Sostituendo tali espressioni nella (7) essa può scriversi per esteso:

$$(11) \quad c(r, t) = \frac{c_1 e^{-\lambda t} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) r^{\nu-1} e^{-\frac{r^2}{4kt}}}{2^{\nu-1} k^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(\nu) t^{\mu+\frac{1}{2}}} \cdot \left\{ \left(\frac{r^2}{4kt}\right)^{\frac{1+\nu}{2}} \cdot \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} - \mu\right)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right)_n \cdot \left(\frac{r^2}{4kt}\right)^n}{(\nu+1)_n \cdot n!} + \right. \\ \left. + \left(\frac{r^2}{4kt}\right)^{\frac{1-\nu}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\nu}{2} - \mu\right)_n \cdot \left(\frac{r^2}{4kt}\right)^n}{(1-\nu)_n \cdot n!} \right\}.$$

La (11) è la estensione cercata della formula (15) ricavata nella prima parte.

Nell'origine la (11) si riduce alla (4):

$$(12) \quad \lim_{r \rightarrow 0} c(r, t) = c_1 e^{-\lambda t} t^{\beta}$$

se si pone:

$$\beta = \frac{\nu}{2} - 1 - \mu.$$

a) Quando al parametro  $\mu$  viene assegnato il valore:

$$\mu = \frac{\nu}{2} - 1$$

ci si riconduce al caso già risolto in [1].

b) Se si assegna un valore:

$$\mu > \frac{\nu}{2} - 1$$

la (11) dà la soluzione per una concentrazione nell'origine decrescente nel tempo con andamento all'incirca di tipo impulsivo.

A questo caso in pratica si può assimilare il rilascio accidentale per un breve periodo di tempo di una elevata concentrazione di sostanza su una piccola area.

Si noti che se è:

$$\lambda \neq 0 \quad ; \quad \mu < \frac{\nu}{2}$$

la concentrazione complessiva integrata nel tempo immessa nel terreno ha valore finito e vale:

$$(13) \quad C_{\text{tot}} = \int_0^{\infty} c(r=0, t) dt = \frac{c_1 \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right)}{\lambda^{\frac{\nu}{2} - \mu}}.$$

Per  $\mu = 0$  la (11) è valida anche per  $u_1 = 0$  (cioè in assenza di moto di filtrazione dell'acqua) e si riduce in tal caso alla espressione (1):

$$(14) \quad c(r, t) = \frac{2 c_1 e^{-\lambda t} e^{-\frac{r^2}{4kt}}}{t}$$

che dà per la quantità complessiva di sostanza  $Q(t)$  presente in uno spessore unitario dell'ammasso poroso:

$$(15) \quad Q(t) = \int_0^{\infty} \frac{2 c_1 e^{-\lambda t} e^{-\frac{r^2}{4kt}}}{t} 2 \pi r dr = 8 \pi k c_1 e^{-\lambda t}.$$

c) Se, infine, si assume:

$$\mu < \frac{\nu}{2} - 1$$

la (11) è la soluzione corrispondente alla immissione progressivamente crescente di sostanza nell'origine.

In definitiva, la (11) risolve per la geometria radiale con sorgente concentrata nell'origine, vari casi di interesse pratico, assegnando un opportuno valore al parametro  $\mu$  in relazione all'andamento temporale della concentrazione che si intende prendere in esame.

### 3. SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DELLA DISPERSIONE IN MOTO PIANO

Quando il deposito di un inquinante viene effettuato su una ampia zona (lagunaggio), al fine di esaminare la sua migrazione in profondità occorre studiare il problema in moto piano.

(1) Per  $\lambda = 0$  la (14) è uguale alla espressione della distribuzione di temperatura in un mezzo di diffusività  $k$  generata da una sorgente filiforme la cui temperatura all'istante iniziale ha forma impulsiva.

Per tale geometria si ricavano le soluzioni della dispersione, ammettendo che l'ammasso poroso occupi il semipiano  $x > 0$ , nel quale si abbia concentrazione nulla all'istante iniziale, prendendo in esame le due seguenti condizioni per la concentrazione in  $x = 0$  <sup>(2)</sup>.

$$(16) \quad c(x = 0, t > 0) = c_1 t e^{-\lambda t}$$

$$(17) \quad c(x = 0, t > 0) = \frac{c_1 e^{-\lambda t}}{t^{1/2}}.$$

In moto piano, con velocità dell'acqua di filtrazione  $U$  costante, l'equazione della dispersione è:

$$(18) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U \frac{\partial c}{\partial x} - \lambda c$$

la cui trasformata secondo Laplace ha soluzione:

$$(19) \quad \bar{c}(x, s) = A e^x \left[ \frac{U}{2k} - \left( \frac{U^2}{4k^2} + \frac{\lambda + p}{k} \right)^{1/2} \right].$$

Per la condizione (16) si deve imporre:

$$(20) \quad A = \frac{c_1}{(p + \lambda)^2}.$$

Antitrasformando, con alcuni passaggi si ricava:

$$(21) \quad c(x, t) = \frac{c_1 e^{-\lambda t}}{2U} \left\{ (Ut + x) e^{\frac{Ux}{k}} \operatorname{erfc} \left( \frac{x + Ut}{2\sqrt{kt}} \right) + \right. \\ \left. + (Ut - x) \operatorname{erfc} \left( \frac{x - Ut}{2\sqrt{kt}} \right) \right\}.$$

Se si impone invece:

$$(16 \text{ bis}) \quad c(x = 0, t > 0) = c_1 t$$

e quindi:

$$(20 \text{ bis}) \quad A = \frac{c_1}{p^2}$$

(2) Nel caso piano non sembra possibile ricavare una soluzione generale equivalente alla (11) come per la geometria radiale. Per la soluzione che soddisfa a:

$$c(x = 0, t > 0) = c_1 e^{-\lambda t}$$

vedasi la prima parte dell'articolo.

e cioè si ammette che il decadimento radioattivo non avvenga in  $x = 0$ , ma solo nel corso del movimento del radionuclide nel terreno, si ricava:

$$(21 \text{ bis}) \quad c(x, t) = \frac{c_1 e^{\frac{xU}{2k}}}{2(U^2 + 4k\lambda)^{1/2}} \left\{ [t(4k\lambda + U^2)^{1/2} - x] \cdot e^{-\frac{x}{2k}(4k\lambda + U^2)^{1/2}} \cdot \operatorname{erfc} \left[ \frac{x - t(4k\lambda + U^2)^{1/2}}{2\sqrt{kt}} \right] + [t(4k\lambda + U^2)^{1/2} + x] \cdot e^{\frac{x}{2k}(4k\lambda + U^2)^{1/2}} \cdot \operatorname{erfc} \left[ \frac{x + t(4k\lambda + U^2)^{1/2}}{2\sqrt{kt}} \right] \right\}.$$

Infine, volendo considerare la condizione (17), si deve imporre:

$$(22) \quad A = \frac{c_1 \sqrt{\pi}}{(\phi + \lambda)^{1/2}}.$$

Con tale posizione, la antitrasformata della (19), ricordando note proprietà della trasformata di Laplace e con opportune sostituzioni della variabile complessa, si riconduce con alcuni passaggi all'espressione:

$$(23) \quad c(x, t) = \frac{c_1 e^{\frac{xU}{2k} - \lambda t}}{t^{1/2}} \left\{ e^{\frac{x^2}{4kt}} - \frac{xU}{2k} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2 k}{U^2 t}} \cdot \left( y^2 - \frac{U^2 x^2}{4k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot J_1 \left[ \left( y^2 - \frac{U^2 x^2}{4k^2} \right)^{1/2} \right] dy \right\}$$

nella quale l'integrale deve essere calcolato per via numerica.

#### 4. ALCUNE VALUTAZIONI NUMERICHE

Per fare, a titolo illustrativo, alcune valutazioni numeriche relative alla (11), si assuma (in tutte le figure che seguono) per il parametro  $\mu$  il valore:

$$\mu = -\frac{1}{2}.$$

In tal caso la (11), antitrasformando la (5), diviene:

$$(24) \quad c(r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{r^\nu c_1 (s + \lambda)^{-\frac{1}{2}} \Gamma \left( \frac{\nu + 1}{2} \right)}{2^{\nu-1} k^{\nu/2} \Gamma(\nu)} \cdot K_\nu \left( \sqrt{\frac{s + \lambda}{k}} r \right) \right] =$$

$$= \frac{c_1 \Gamma \left( \frac{\nu + 1}{2} \right) \cdot e^{-\lambda t} r^\nu e^{-\frac{r^2}{8kt}} K_{\nu/2} \left( \frac{r^2}{8kt} \right)}{\pi^{1/2} 2^\nu k^{\nu/2} \Gamma(\nu) t^{1/2}}$$

che nell'origine si riduce (tenendo presente l'espressione per piccoli argomenti della funzione di Bessel  $K$  e la formula di duplicazione della funzione gamma) a:

$$(25) \quad \lim_{r \rightarrow 0} c(r, t) = c_1 e^{-\lambda t} t^{\frac{\nu-1}{2}}$$

in armonia con la (12).

La fig. 1 mostra l'andamento temporale della concentrazione ad alcune distanze dall'origine, rapportata alla concentrazione che si ha in pari tempo nell'origine, dove si ammette che essa cresca nel tempo secondo la relazione:

$$(25) \quad c(r = 0, t) = c_1 t^{0,5}$$

e quindi avendo assunto:

$$\nu = \frac{u_1}{2k} = 2.$$

La figura mostra (come evidenziato anche dalla (24)) che per tempi elevati, tali da rendere  $r^2/8kt$  piccola, la  $c(r, t)$  raggiunge, dopo un ritardo iniziale, i valori che ha la concentrazione nell'origine, di cui poi segue istante per istante l'andamento (25), senza sfasamento.

Risultati analoghi sono indicati nella fig. 2 che si riferisce ad una concentrazione nell'origine crescente proporzionalmente al tempo secondo la relazione:

$$(26) \quad c(r = 0, t) = c_1 t$$

corrispondente a:

$$\nu = \frac{u_1}{2k} = 3.$$

Malgrado il diverso tasso di incremento della concentrazione nell'origine, le figg. 1, 2 indicano che i tempi richiesti affinché la  $c(r, t)$  raggiunga i valori della  $c(r = 0, t)$  sono, a parità di distanza dall'origine, assai prossimi; si consideri però che nel secondo esempio la velocità di filtrazione dell'acqua è maggiore.

La fig. 3 dimostra l'influenza dell'assorbimento del terreno che si traduce in uno sfasamento crescente fra la  $c(r, t)$  e la  $c(r = 0, t)$ .

La fig. 4 illustra infine l'andamento temporale della concentrazione, in alcune posizioni, quando nell'origine si assuma una concentrazione avente un picco all'istante iniziale e poi decrescente secondo la relazione:

$$(27) \quad c(r = 0, t) = c_1 e^{-\lambda t} \cdot t^{-0,25}$$

(corrispondente a:  $\nu = 0,5$ ).

Come si vede, l'attenuazione dell'impulso è sensibile già a piccole distanze dall'origine, dato anche il piccolo valore della portata radiale dell'acqua.

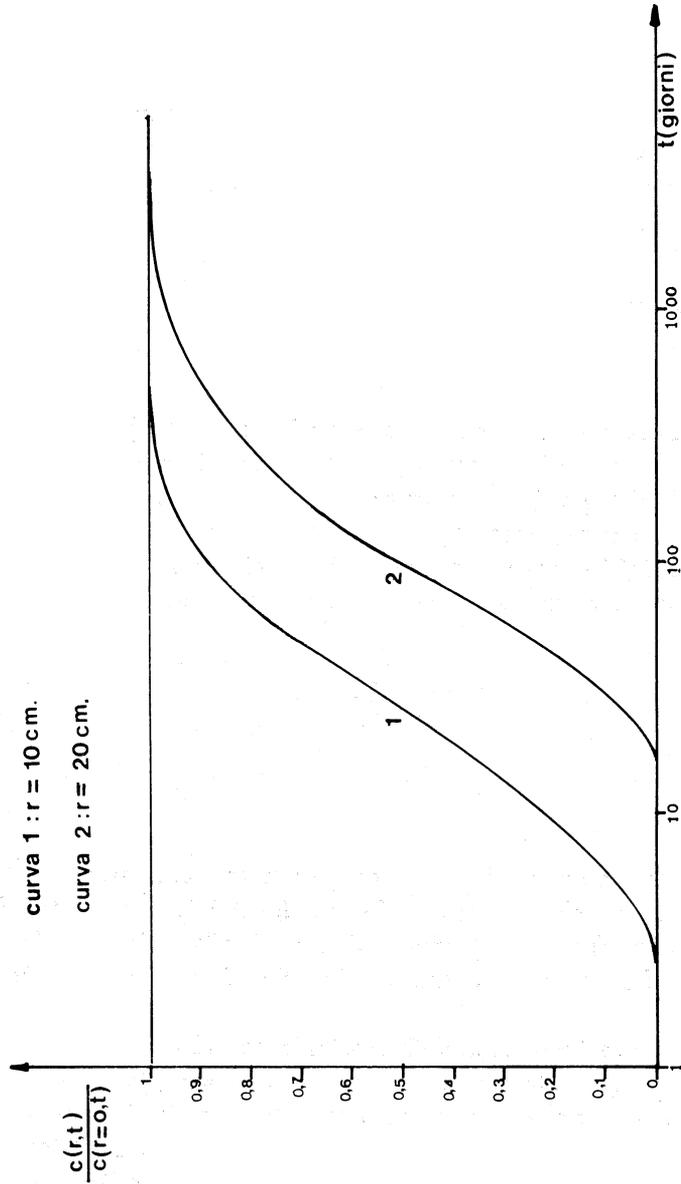


Fig. I. - Andamento temporale del rapporto fra concentrazione, in due posizioni prefissate, e concentrazione nell'origine:  $c(r=0,t) = c_1 \sqrt{t} \left( \frac{u_1}{2k} = 2; k = k_0 = 1 \text{ cm}^2/\text{giorno}; \Delta G = 0; \lambda = 0 \right)$ .

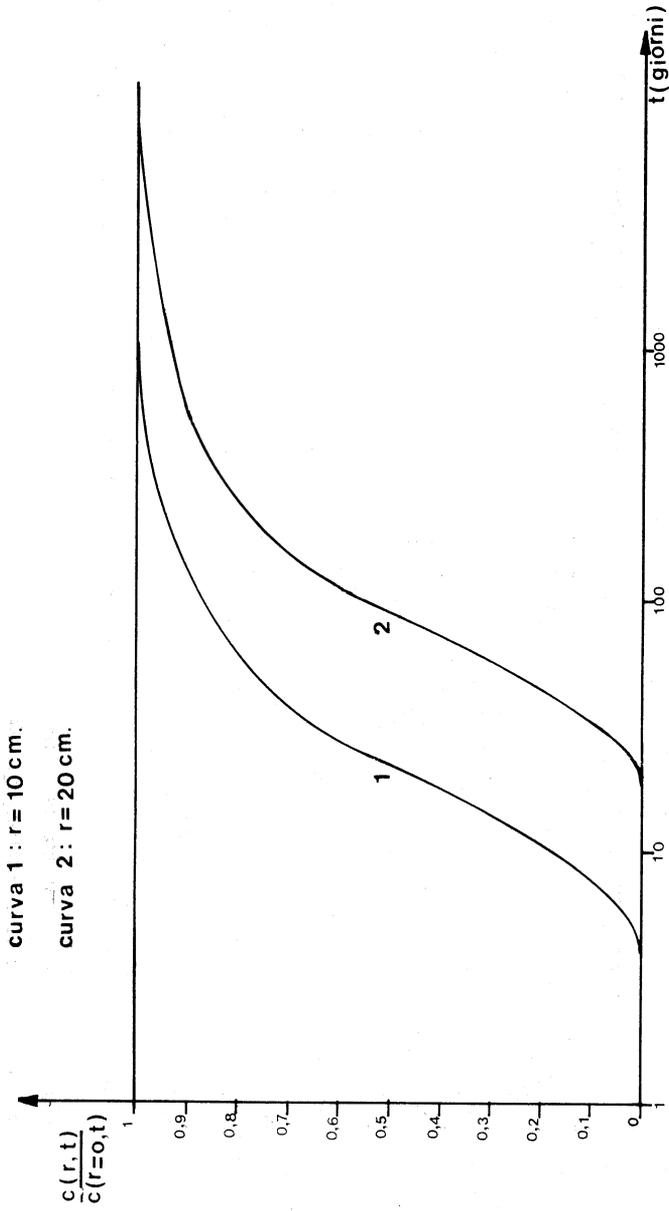


Fig. 2. - Andamento temporale del rapporto fra concentrazione, in due posizioni prefissate, e concentrazione nell'origine:  $c(r=0,t) = c_1 t$ ;  $\left(\frac{M_1}{2k} = 3; k = k_0 = 1 \text{ cm}^2/\text{giorno}; \Delta G = 0; \lambda = 0\right)$ .

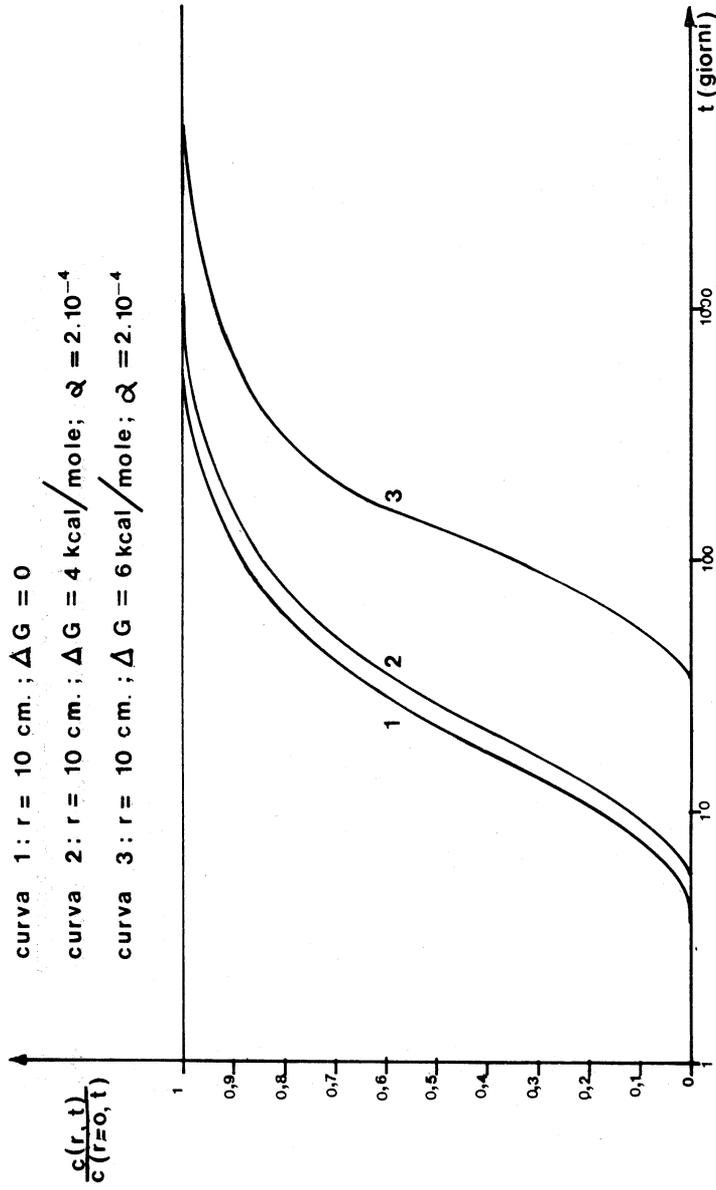


Fig. 3. - Influenza dell'assorbimento del terreno sull'andamento temporale del rapporto fra la concentrazione in un punto prefissato e la concentrazione nell'origine  $c(r=0, t) = c_1 t$ ;  $\left(\frac{M_1}{2k} = 3; k_0 = 1 \text{ cm}^2/\text{giorno}; \lambda = 0\right)$ .

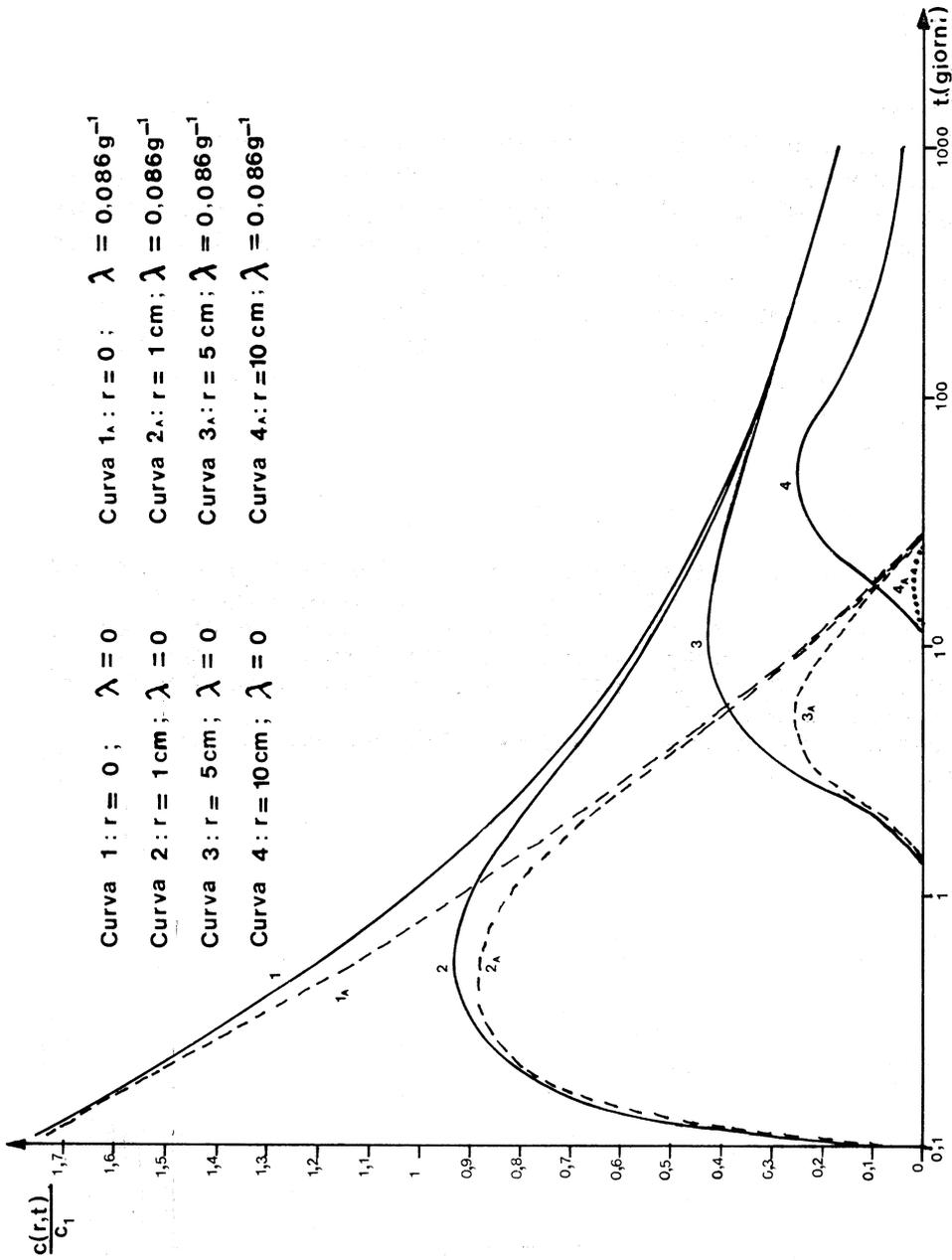


Fig. 4. - Andamento temporale della concentrazione per due valori di  $\lambda$ , a diverse distanze dall'origine.

$$c(r=0, t) = \frac{c_1}{t^{0,25}}; \frac{u_1}{2k} = 0,5; k = k_0 = 1 \text{ cm}^2/\text{giorno}; \Delta G = 0.$$

Per quanto riguarda l'effetto dell'eventuale decadimento radioattivo della sostanza, si può osservare che se il tempo di dimezzamento del nuclide non è breve (come ad esempio si ha per taluni prodotti di fissione dell'uranio come  $^{137}\text{Cs}$ :  $t_{1/2} = 28$  anni, e  $^{90}\text{Sr}$ :  $t_{1/2} = 30$  anni) il decadimento non ha una influenza apprezzabile rispetto alla attenuazione dovuta alla geometria del sistema.

Se invece il nuclide ha un breve tempo di dimezzamento (e ciò si deve intendere in relazione alle condizioni in cui si esamina la dispersione e quindi in dipendenza della velocità di filtrazione dell'acqua, di  $k_0$ , della distanza dall'origine, ecc.), il decadimento può causare una attenuazione sensibile rispetto a quella determinata della distanza.

Ciò è dimostrato in fig. 4, dove per la condizione (27) si è posto a confronto, per alcune distanze, l'andamento temporale della concentrazione per  $\lambda = 0$  e per  $\lambda = 0,086$  giorni $^{-1}$ , valore quest'ultimo relativo a  $^{131}\text{I}$  (tempo di dimezzamento di 8,05 giorni).

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] R. CENERINI (1975) - *Dispersione Idrodinamica di una sostanza inquinante nel terreno*. Nota I - «Acc. Naz. Lincei, Rend. Sc. fis. mat. nat.», 58 (4), 593-604.
- [2] Preprints of Second International Symposium on «Underground waste management and artificial Recharge». September 26-29, 1973. New Orleans. Louisiana, USA.
- [3] G. E. ROBERTS e H. KAUFMAN (1966) - *Table of Laplace Transforms*, W. B. Saunders Company. Philadelphia and London.
- [4] M. ABRAMOWITZ e I. A. STEGUN - *Handbook of Mathematical functions*. Dover Publications, Inc., New York.