
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

FRANCESCO ANGRILLI

**Sulla configurazione di equilibrio di una condotta
sottomarina durante il varo**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 58 (1975), n.6, p. 892–897.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_6_892_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sulla configurazione di equilibrio di una condotta sottomarina durante il varo.* Nota di FRANCESCO ANGRILLI, presentata (*) dal Corresp. G. COLOMBO.

SUMMARY. — This paper is concerned with some cases of reducibility to quadratures of the equation describing the static equilibrium of a submerged pipe.

The equations are derived neglecting flexural rigidity: it is shown that for many real cases, this approximation is satisfactory. The equilibrium configuration may be explicitly expressed by means of elementary transcendental functions when the ratio between the weight per unit length in air and in the water is an integer.

INTRODUZIONE

Nell'affrontare il problema delle verghe, attualmente di particolare interesse per le applicazioni alla progettazione di condotte sottomarine, ancoraggi, risers, ecc., è spesso necessario introdurre ipotesi semplificative che riducono l'interesse dei risultati ai casi particolari trattati, perdendo di generalità.

Le grandi deformazioni di una verga conducono ad un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari, alquanto complesse nel caso della teoria esatta.

Nei casi pratici, per una trattazione analitica del problema, è necessario ricorrere ad ipotesi atte a semplificare ed a linearizzare il problema.

Facendo riferimento alla progettazione di condotte sottomarine e considerando che attualmente si pensa di eseguire vari su fondali di 500÷600 metri, sembra legittimo trascurare la rigidità flessionale in una condotta che subisce grandi deformazioni integrali corrispondenti a piccole deformazioni locali.

Il modello proposto è pertanto quello del filo, che, rispetto al modello della catena, usato da molti Autori, come prima approssimazione, ha il pregio di tener conto del fatto che la spinta idrostatica è perpendicolare in ogni punto all'asse longitudinale della condotta stessa.

Si dimostra che per un tale modello il problema della determinazione della configurazione di equilibrio statico si riduce sempre alle quadrature e si esprime in forma finita ed esplicita mediante trascendenti elementari, quando il rapporto

$$p_1/p_2 = n \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

(*) Nella seduta dell'11 giugno 1975.

I. CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO DI UN FILO TESO,
SOTTOPOSTO AL PESO PROPRIO ED ALLA SPINTA IDROSTATICA

Il problema che qui si considera è piano per le caratteristiche delle forze agenti nel presente caso. Tali forze sono il peso proprio p_1 e la spinta idrostatica.

Proiettando l'equazione indefinita dell'equilibrio dei fili (fig. 1):

$$(1) \quad \frac{d(\tau \bar{T})}{ds} + \bar{F} = 0$$

su tangente e normale si ha:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tau}{ds} + F_T = 0 \\ \frac{\tau}{\rho} + F_N = 0. \end{array} \right.$$

Come è ben noto sull'elemento ds di condotta agisce il peso $p_1 ds$ lungo la verticale verso il basso e la pressione esterna del fluido. Quest'ultima è uguale alla spinta idrostatica che agirebbe sul tratto ds del tubo (qualora esso fosse isolato dal resto e chiuso agli estremi) alla quale si sottraggono le azioni che il fluido eserciterebbe sulle sezioni terminali, indicato in fig. 1 con $\Delta\tau$.

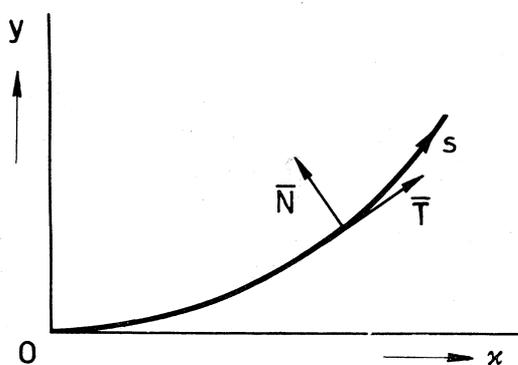
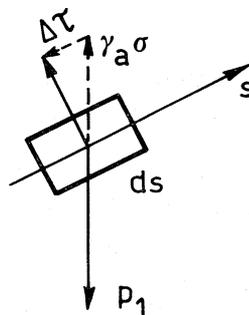


Fig. 1.



Pertanto si ha:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tau}{ds} - p_1 \frac{dy}{ds} = 0 \\ \frac{\tau}{\rho} - p_2 \frac{dx}{ds} = 0 \end{array} \right.$$

dove si è posto $p_2 = p_1 - \gamma_a \sigma$.

Dalla (3) si ha:

$$\tau - p_1 y = \tau_0$$

e quindi la (3) diventa:

$$(4) \quad y'' = \frac{p_2}{\tau_0 + p_1 y} (1 + y'^2).$$

Una prima integrazione della (4) conduce alla:

$$(5) \quad 1 + y'^2 = K (\tau_0 + p_1 y)^{2p_2/p_1}$$

con K costante di integrazione; esplicitando ed integrando si ha:

$$(6) \quad x = \int [K (\tau_0 + p_1 y)^{2p_2/p_1} - 1]^{1/2} dy.$$

L'integrale della forma differenziale binomia è esprimibile mediante trascendenti elementari se

$$p_1 = n p_2 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

cioè se

$$(7) \quad p_1 = \frac{n}{n-1} \gamma_a \sigma$$

ovvero quando il peso in aria è $2, 3/2, 4/3, \dots$ della spinta idrostatica.

Convieni qui notare che tali valori cadono nel campo di interesse pratico. Infatti si consideri, ad esempio, una condotta in acciaio per grandi profondità (> 400 metri) non ricoperta. Per definizione si ha:

$$p_1 = \gamma_f \pi d (D - d) \quad ; \quad \gamma_a \sigma = \gamma_a \pi \frac{D^2}{4}$$

dove γ_f e γ_a sono, rispettivamente, il peso specifico dell'acciaio e quello dell'acqua marina, D è il diametro della condotta e d lo spessore. Dalla (7) per $n = 2$, e fissando uno spessore di 2,8 cm, che è il massimo saldabile con le tecniche attuali, si ha un diametro di 39,46 cm; per $n = 3$ e $d = 2,8$ cm, sempre dalla (7), si ricava $D = 53,687$ cm. Tali diametri sono ragionevolmente vicini e quelli delle condotte di massimo diametro che si possono varare in acque fino a profondità intorno a 1000 metri. Più precisamente tale limitazione massima sul diametro deriva da una condizione di stabilità della condotta, in relazione al fenomeno distruttivo di buckling, per assegnata profondità di varo e per ogni assegnato spessore.

Per $n = 2$, integrando la (6) si ha $y = \frac{1}{4} \frac{p_1}{\tau_0} x^2$, cioè la configurazione è parabolica e coincide con l'equazione dei ponti sospesi in cui il peso del ponte per unità di lunghezza coincide con il peso in acqua della condotta $p_2 = p_1 - \gamma_a \rho = \frac{p_1}{2}$.

Per $n = 3$ si ha:

$$(8) \quad x = \frac{3}{4} \frac{\tau_0}{p_1} \left[\ln \frac{\sqrt{1 - [1 + (p_1/\tau_0) y]^{-2/3}} + 1}{\sqrt{1 - [1 + (p_1/\tau_0) y]^{-2/3}} - 1} + \right. \\ \left. + 2 [1 + (p_1/\tau_0) y]^{2/3} \cdot \sqrt{1 - [1 + (p_1/\tau_0) y]^{-2/3}} \right].$$

Tale curva è riportata in fig. 2 a tratto continuo; a tratteggio è disegnata la catenaria corrispondente. All'aumentare della profondità la differenza tra le due curve risulta più rimarchevole.

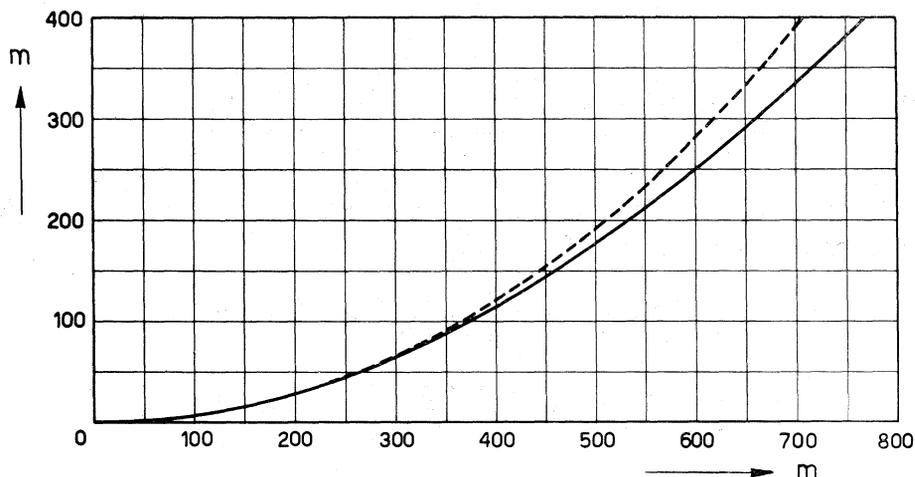


Fig. 2.

2. VALUTAZIONE DEGLI EFFETTI DELLA RIGIDITÀ FLESSIONALE E DELLA ESTENDIBILITÀ SULLA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO E SUGLI SFORZI

Volendo esaminare la validità del modello occorre valutare gli effetti della rigidità flessionale che è stata trascurata. Bisogna quindi far riferimento alle equazioni delle verghe, che proiettate sugli assi intrinseci forniscono le:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tau}{ds} - \frac{v}{\rho} - p_1 \frac{dy}{ds} = 0 \\ \frac{dv}{ds} + \frac{\tau}{\rho} - p_2 \frac{dx}{ds} = 0 \\ \frac{dM}{ds} + v = 0. \end{array} \right.$$

Onde verificare che la rigidità flessionale è trascurabile dobbiamo vedere se e in quali casi i termini v/ρ e dv/ds sono trascurabili rispettivamente a $p_1 \frac{dy}{ds}$ ed a $p_2 \frac{dx}{ds}$.

Ad esempio, se si considera il caso $n = 2$ e si integra la (5) con la condizione $y(0) = 0$ ed avendo posto $y'(0) = 0$ nella (4) si ricava:

$$(10) \quad y = \frac{1}{4} \frac{p_1}{\tau} x^2$$

e quindi:

$$(11) \quad \frac{v/\rho}{\phi_1 dy/ds} = \frac{3 EJ \left(\frac{\phi_1}{2 \tau_0} \right)^3}{\phi_1 \left[1 + \left(\frac{\phi_1}{2 \tau_0} \right)^2 x^2 \right]^4}$$

$$(12) \quad \frac{dv/ds}{\phi_2 dx/ds} = \frac{3 EJ \left(\frac{\phi_1}{2 \tau_0} \right)^3 \left[1 - 5 \left(\frac{\phi_1}{2 \tau_0} \right)^2 x^2 \right]}{\frac{\phi_1}{2} \left[1 + \left(\frac{\phi_1}{2 \tau_0} \right)^2 x^2 \right]^4}.$$

I valori massimi delle (9) e (10) si hanno per $x = 0$, e considerando $d = 2,8$ cm; $D = 40$ cm; $\tau = 80'000$ Kg, risulta:

$$(13) \quad \left[\frac{v/\rho}{\phi_1 dy/ds} \right]_{\max} = \frac{3 EJ}{\phi_1} \left(\frac{\phi_1}{2 \tau_0} \right)^3 = 0,66 \cdot 10^{-3}$$

$$(14) \quad \left[\frac{dv/ds}{\phi_2 dx/ds} \right]_{\max} = \frac{6 EJ}{\phi_1} \left(\frac{\phi_1}{2 \tau_0} \right)^3 = 1,32 \cdot 10^{-3}.$$

Pertanto i termini corrispondenti alla rigidità flessionale risultano trascurabili.

L'ipotesi di inestendibilità è giustificata nei casi reali dal fatto che gli allungamenti sono dell'ordine di 1 parte per diecimila.

ELENCO DEI SIMBOLI

d	spessore della condotta;	ϕ_1	peso in aria della condotta per unità di lunghezza;
D	diametro esterno della condotta;	ϕ_2	peso in acqua della condotta per unità di lunghezza;
E	modulo di elasticità;	γ_a	peso specifico dell'acqua;
\bar{F}	forza agente;	γ_f	peso specifico dell'acciaio;
F_T, F_N	componenti della forza agente secondo la tangente e la normale della deformata;	v	forza di taglio;
J	momento di inerzia della sezione;	ρ	raggio di curvatura della deformata;
M	momento flettente;	τ	forza assiale;
\bar{N}, \bar{T}	versori della tangente e della normale alla deformata;	τ_0	forza assiale nell'origine degli assi.

BIBLIOGRAFIA

- A. E. H. LOVE (1944) - *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New York, N. Y. Fourth Edition.
 R. FRISCH FAY (1962) - *Flexible Bars*, Butterworths, London.
 D. A. DIXON e D. R. RUTLEDGE (1968) - *Stiffened Catenary Calculations in Pipeline Laying Problems*, « J. Eng. for Ind. », series B, 90 (1).

-
- L. D. FINN e J. T. POWERS (1969) – *Stress Analysis of Offshore Pipelines During Installation*. Offshore Tech. Confer. Texas, Paper n. OTC 1071.
- T. M. WANG (1969) – *Non Linear Bending of Beams with Uniformly distributed Loads*, « Int. J. Non-Linear Mech. », 4, Pergamon Press.
- D. W. DAREING e R. F. NEATHERY (1970) – *Marine Pipeline Analysis Based on Newton's Method with an Arctic Application*, « J. Eng. for Ind. », series B, 92 (4).
- P. BRANDO e G. SEBASTIANI (1971) – *Determination of Sealines Elastic Curves and Stresses to be Expected During Laying Operations*, Offshore Tech. Conf., Texas, Paper n. OTC 1354.
- I. KHWAJA (1971) – *Large Deflections of Thin Elastic Bars by the Electronic Analogue Computer*, « Int. J. Mech. Sci. », 13, Pergamon Press.
- J. E. HALL e A. J. HEALEY (1975) – *An Analytical Study of Controlled Buoyancy in Laying Deep-Sea Pipelines*, « J. Eng. for Ind. », series B, 97 (1).