Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Su alcune proprietà dei sistemi dinamici integrabili per separazione di variabili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.5, p. 738–745.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_5_738_0>

Meccanica analitica. — *Su alcune proprietà dei sistemi dinamici integrabili per separazione di variabili.* Nota (*) del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper the author, with reference to his previous works on the determination of all consevative dynamical systems with n degrees of freedom, whose correspondent Hamilton-Jacobi equation is solvable by separation of variables, exposes some properties of these systems. In the general case in which they possess $k\,(k < n)$ integrals linear in the momenta, he determines an easy contact transformation which transforms the above systems in new systems with k ignorable coordinates. These last systems admit $n - h$ integrals quadratic in the momenta, involving the energy integral, and allow to obtain the whole solution of the dynamical equations.

1. Nella ricerca di tutti i sistemi dinamici con vincoli indipendenti dal tempo, soggetti a forze conservative e con n gradi di libertà, la cui corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi è integrabile per separazione di variabili, sono pervenuto, nel caso più generale, a due tipi di soluzioni, in ciascuno dei quali esistono $k\,(k < n)$ integrali lineari nei momenti ed $n - k$ integrali quadratici [1], [2], [3].

Vogliamo vedere intanto in questa Nota come, in virtù dei k integrali lineari nei momenti (o nelle velocità lagrangiane), i detti sistemi dinamici, mediante una semplice trasformazione canonica puntuale (o di contatto), si trasformino in sistemi dinamici con k coordinate ignorabili.

Invero, indicando con $x_1\, x_2\,, \cdots, x_n$ i parametri lagrangiani che in ogni istante individuano la posizione del sistema, nel primo tipo di soluzione i coefficienti dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}\, \dot{x}_i\, \dot{x}_j \tag{1}$$

sono dati da

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \mathrm{H} \sum_{1}^{k}{}_{s} \frac{X_i^{(s)} X_j^{(s)}}{\sum_{k+1}^{n}{}_{t}\, K_t^{(s)}(x_t)}\,, && (i\,, j = 1\,, 2\,, \cdots, n\,;\, j \neq i)\,,\\
a_{ii} &= \mathrm{H} \sum_{1}^{k}{}_{s} \frac{[X_i^{(s)}]^2}{\sum_{k+1}^{n}{}_{t}\, K_t^{(s)}(x_t)}\,, && (i = 1\,, 2\,, \cdots, k),\\
a_{ii} &= \mathrm{H} \left\{ \psi_i(x_i) + \sum_{1}^{k}{}_{s} \frac{[X_i^{(s)}]^2}{\sum_{k+1}^{n}{}_{t}\, K_t^{(s)}(x_t)} \right\}, && (i = k+1\,, \cdots, n)\,,\ 1 < k < n-1\,,
\end{aligned} \tag{2}$$

(*) Presentata nella seduta del 10 maggio 1975.

dove le $X_i^{(s)}$, ψ_i sono funzioni del solo parametro x_i, ed è inoltre $H = \sum_{k+1}^{n} {}_t H_t(x_t)$, mentre il potenziale U delle forze ha la forma

$$(3) \qquad U = \frac{1}{H} \sum_{k+1}^{n} {}_i U_i(x_i), \qquad \text{con} \quad U_i(x_i) = \sum_{1}^{k} {}_s b_s K_i^{(s)}(x_i) + \Phi_i(x_i),$$

essendo le b_s delle costanti.

La corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi risulta

$$(4) \qquad \mathcal{H} \equiv (T) - U = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} {}_{ij} a^{ij} p_i p_j - U = h,$$

dove le a^{ij} sono gli elementi reciproci dei coefficienti a_{ij} nel determinante di questi coefficienti le p_i sono i momenti [cui vanno sostituite le derivate parziali $\partial W/\partial x_i$ di una funzione $W(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1}^{n} {}_i W_i(x_i)$], ed h è la costante dell'energia.

Ricordiamo che detti elementi reciproci sono dati da [3]:

$$a^{ij} = \frac{1}{H} \sum_{1}^{k} {}_s \frac{B_{is}}{B} \left\{ \frac{B_{js}}{B} \sum_{k+1}^{n} {}_t K_t^{(s)}(x_t) + \sum_{k+1}^{n} {}_l \sum_{1}^{k} {}_r \frac{B_{jr}}{B} \frac{X_l^{(r)} X_l^{(s)}}{\psi_l(x_l)} \right\}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, k),$$

$$(5) \quad a^{ij} = - \frac{1}{H\psi_i(x_i)} \sum_{1}^{k} {}_s X_i^{(s)} \frac{B_{js}}{B}, \qquad (i = k+1, \cdots, n; = 1, 2, \cdots, k)$$

$$a^{ii} = \frac{1}{H\psi_i(x_i)}, \qquad (i = k+1, \cdots, n); \; a^{ij} = 0, (i, j = k+1, \cdots, n; j \neq i).$$

In questo caso le equazioni canoniche

$$(6) \qquad \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

posseggono k integrali lineari nei momenti

$$(7) \qquad p_i = \sum_{1}^{k} {}_s \alpha_s X_i^{(s)}(x_i), \qquad (i = 1, 2, \cdots, k),$$

dove le α_s sono costanti arbitrarie, ed $n - k$ integrali quadratici

$$(8) \qquad \frac{p_i^2}{2\psi_i} - \frac{p_i}{\psi_i} \sum_{1}^{k} {}_s \alpha_s X_i^{(s)} + \frac{1}{2} \sum_{1}^{k} {}_s \alpha_s^2 K_i^{(s)}(x_i) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{1}^{k} {}_{rs} \alpha_r \alpha_s \frac{X_i^{(r)} X_i^{(s)}}{\psi_i} - U_i(x_i) - h H_i(x_i) = \beta_i, \quad (i = k+1, \cdots, n),$$

essendo le β_i nuove costanti arbitrarie legate dalla relazione

$$(9) \qquad \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = 0.$$

Nella (5) B è il determinante delle $X_i^{(s)}$ $(i, s = 1, 2, \cdots, k)$, cioè

$$B = \begin{vmatrix} X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \cdots, X_1^{(k)} \\ X_2^{(1)}, X_2^{(2)}, \cdots, X_2^{(k)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, \cdots, X_k^{(k)} \end{vmatrix} \tag{10}$$

e B_{is} è il complemento algebrico di $X_i^{(s)}$. Allora gli integrali lineari (7), risoluti rispetto alle costanti α_s, si possono mettere sotto la forma

$$\sum_1^k{}_i \frac{B_{is}}{B} p_i = \alpha_s, \qquad (s = 1, 2, \cdots, k). \tag{11}$$

Ciò premesso vogliamo vedere che esiste una *trasformazione puntuale omogenea* (o di Mathieu), dalle variabili $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, a delle nuove variabili $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, tale che la trasformata $\bar{\mathscr{H}}$ della funzione hamiltoniana $\mathscr{H}$, abbia k variabili ignorate, ad esempio $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$. Indicando ancora con $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ le variabili coniugate di $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, la cercata trasformazione dovrà verificare, come è noto, la relazione differenziale [4].

$$\sum_1^n{}_s \pi_s \, d\xi_s - \sum_1^n{}_s p_s \, dx_s = 0. \tag{12}$$

Assumiamo come variabili π_s quella definite dalle relazioni

$$\pi_s = \sum_1^k{}_i f_{is} p_i, \quad \text{per } s = 1, 2, \cdots, k; \quad \pi_s = p_s \quad \text{per } s = k+1, \cdots, n, \tag{13}$$

dove per semplicità si è posto

$$f_{is} = B_{is}/B. \tag{14}$$

Riterremo inoltre $\xi_s = x_s$ per $s = k + 1, \cdots, x$.

Sostituendo nella (12) si ha

$$\sum_1^k{}_s \left(\sum_1^k{}_i f_{is} p_i \right) d\xi_s - \sum_1^k{}_i p_i \, dx_i \equiv \sum_1^k{}_i \left(\sum_1^k{}_s f_{is} \, d\xi_s - dx_i \right) p_i = 0,$$

da cui segue

$$\sum_1^k{}_s f_{is} \, d\xi_s = dx_i, \qquad (i = 1, 2, \cdots, k). \tag{15}$$

Si ha pertanto

$$f_{is} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_s}$$

e quindi

$$\pi_s = \sum_1^k{}_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_s} p_i, \qquad (s = 1, 2, \cdots, k) \tag{16}$$

Risolvendo le (15) rispetto alle $d\xi_s$, e ricordando la (14), si ha inoltre

$$d\xi_s = \sum_1^k {}_i \mathrm{X}_i^{(s)}(x_i)\,dx_i\,, \qquad (s = 1, 2, \cdots, k),$$

e perciò le nuove variabili ξ_s, per $s = 1, 2, \cdots, k$, sono date da

$$\xi_s = \sum_1^k {}_i \int \mathrm{X}_i^{(s)}(x_i)\,dx_i\,, \qquad (s = 1, 2, \cdots, k). \tag{17}$$

Concludendo la trasformazione definita dalle

$$\begin{aligned} \pi_s &= \sum_1^k {}_i \frac{\mathrm{B}_{is}}{\mathrm{B}} p_i\,, \qquad (s = 1, 2, \cdots, k)\,;\ \pi_s = p_s\,,\ (s = k+1, \cdots, n), \\ \xi_s &= \sum_1^k {}_i \int \mathrm{X}_i^{(s)}(x_i)\,dx_i\,,\ (s = 1, 2, \cdots, k)\,;\ \xi_s = x_s\,,\ (s = k+1, \cdots, n), \end{aligned} \tag{18}$$

trasforma il sistema canonico (6), corrispondente alla prima soluzione considerata, in un nuovo sistema canonico con k variabili ignorate.

2. È opportuno vedere ancora come si trasforma la funzione hamiltoniana $\mathscr{H}$ nel nuovo sistema canonico.

Poiché si può scrivere

$$\mathscr{H} = (\mathrm{T}_1) + (\mathrm{T}_2) + (\mathrm{T}_3) - \mathrm{U}\,,$$

con

$$(\mathrm{T}_1) = \frac{1}{2}\sum_1^k {}_{ij}\, a^{ij} p_i p_j \quad , \quad (\mathrm{T}_2) = \sum_{k+1}^n {}_i \sum_1^k {}_j\, a^{ij} p_i p_j \quad , \quad \mathrm{T}_3 = \frac{1}{2}\sum_{k+1}^n {}_i\, a^{ii} p_i^2\,,$$

in virtù delle (5) si ha

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}_1) &= \frac{1}{2\mathrm{H}} \sum_1^k {}_{ij} \sum_1^k {}_s \frac{\mathrm{B}_{is}}{\mathrm{B}} \left\{ \frac{\mathrm{B}_{js}}{\mathrm{B}} \sum_{k+1}^n {}_t \mathrm{K}_t^{(s)}(x_t) + \sum_{k+1}^n {}_l \sum_1^k {}_r \frac{\mathrm{B}_{jr}}{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{X}_l^{(r)}\mathrm{X}_l^{(s)}}{\psi_l(x_l)} \right\} p_i p_j = \\ &= \frac{1}{2\mathrm{H}} \left\{ \sum_1^k {}_s \sum_1^k {}_{ij} \frac{\mathrm{B}_{is}}{\mathrm{B}} p_i \frac{\mathrm{B}_{js}}{\mathrm{B}} p_j \sum_{k+1}^n {}_t \mathrm{K}_t^{(s)}(x_t) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^k {}_{sr} \sum_1^k {}_{ij} \frac{\mathrm{B}_{is}}{\mathrm{B}} p_i \frac{\mathrm{B}_{jr}}{\mathrm{B}} p_j \sum_{k+1}^n {}_l \frac{\mathrm{X}_l^{(r)}\mathrm{X}_l^{(s)}}{\psi_l(x_l)} \right\}. \end{aligned}$$

cioè

$$(\mathrm{T}_1) = \frac{1}{2\mathrm{H}} \left\{ \sum_1^k {}_s \alpha_s^2 \sum_{k+1}^n {}_t \mathrm{K}_t^{(s)}(x_t) + \sum_1^k {}_{rs} \alpha_r \alpha_s \sum_{k+1}^n {}_l \frac{\mathrm{X}_l^{(r)}\mathrm{X}_l^{(s)}}{\psi_l(x_l)} \right\}.$$

e questa mostra che in (T_1) le variabili $x_1, x_2, \cdots, x_k$ sono scomparse. Così pure si ha

$$(\mathrm{T}_2) = -\frac{1}{\mathrm{H}} \sum_{k+1}^n {}_i p_i \sum_1^k {}_s \frac{\mathrm{X}_i^{(s)}}{\psi_i} \sum_1^k {}_j \frac{\mathrm{B}_{js}}{\mathrm{B}} p_j = -\frac{1}{\mathrm{H}} \sum_1^k {}_s \alpha_s \sum_{k+1}^n {}_i \frac{\mathrm{X}_i^{(s)}}{\psi_i} p_j\,,$$

e quindi anche (T_2) è indipendente da $x_1, x_2, \cdots, x_k$.

Infine è evidente che anche (T_3) ed U sono indipendenti da $x_1, x_2, \cdots, x_k$ e in definitiva la funzione hamiltoniana ridotta risulta

$$(19) \qquad \overline{\mathscr{H}} = \frac{1}{H} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k+1}^{n}{}_i \frac{1}{\psi_i} \left[p_i - \sum_{1}^{k}{}_s \alpha_s X_i^{(s)} \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{1}^{k}{}_s \alpha_s^2 \sum_{k+1}^{n}{}_t K_t^{(s)}(x_t) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k+1}^{k}{}_i \left[\sum_{1}^{k}{}_s b_s K_i^{(s)}(x_i) + \Phi_i(x_i) \right] \right\}.$$

Il sistema canonico (6), di rango $2n$, si trasforma quindi nel sistema canonico ridotto

$$(20) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \overline{\mathscr{H}}}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \overline{\mathscr{H}}}{\partial x_i} \, , \qquad (i = k+1, \cdots, n),$$

che è di rango $2(n-k)$. Esso ammette gli $(n-k)$ integrali quadratici

$$(21) \quad F_1 \equiv \frac{1}{2\psi_i} \left[p_i - \sum_{1}^{k}{}_s \alpha_s X_i^{(s)} \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{1}^{k}{}_s \alpha_s^2 K_i^{(s)}(x_i) - U_i - h H_i = \beta_i \, ,$$
$$(i = k+1, \cdots, n),$$

che non sono altro che gli integrali (8), dove la somma delle β_i è nulla, e quindi di quelle costanti ne sono arbitrarie soltanto $n-k-1$.

Questi integrali, ciascuno dei quali dipende da una sola coppia di variabili coniugate (x_i, p_i), sono ovviamente a due a due in involuzione e risolubili rispetto ai momenti p_i. I sistemi considerati si integrano perciò completamente mediante quadrature, come si è visto in [3].

Gli integrali (21) implicano l'integrale dell'energia. In vero, sommando rispetto all'indice i da $k+1$ ad n, poiché $\sum_{k+1}^{n}{}_i \beta_i = 0$, si ottiene

$$\sum_{k+1}^{n}{}_i F_i \equiv \frac{1}{2} \sum_{k+1}^{n}{}_i \frac{1}{\psi_i} \left[p_i - \sum_{1}^{k}{}_s \alpha_s X_i^{(s)} \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{1}^{k}{}_s \alpha_s^2 \sum_{k+1}^{n}{}_i K_i^{(s)}(x_i) - \sum_{k+1}^{n}{}_i U_i - hH = 0$$

si ha cioè la relazione

$$\sum_{k+1}^{n}{}_i F_i = H(\overline{\mathscr{H}} - h) = 0 \, ,$$

da cui segue $\overline{\mathscr{H}} = h$, che è proprio l'integrale dell'energia.

3. Un secondo caso in cui le equazioni canoniche (6) si integrano per separazione di variabili, si ha quando i coefficienti a_{ij} dell'energia cinetica sono dati da

$$\alpha_{ij} = \sum_{1}^{k}{}_s X_i^{(s)}(x_i) X_j^{(s)}(x_j)/\varphi^{ns}, \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n; j \neq i),$$

$$(22) \qquad a_{ii} = \sum_{1}^{k}{}_s [X_i^{(s)}]^2/\varphi^{ns}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, k),$$

$$a_{ii} = \frac{1}{\varphi^{ni}} + \sum_{1}^{k}{}_s [X_i^{(s)}(x_i)]^2/\varphi^{ns}, \qquad (i = k+1, \cdots, n),$$

dove φ^{ns} è l'elemento reciproco di c_{ns} $(s = 1, 2, \cdots, k)$, oppure di φ_{ns} $(s = k + 1, \cdots, n)$, nel determinante

$$\varphi = \begin{vmatrix} c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1k}, \varphi_{1,k+1}, \cdots, \varphi_{1n} \\ c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2k}, \varphi_{2,k+1}, \cdots, \varphi_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}, c_{n2}, \cdots, c_{nk}, \varphi_{n,k+1}, \cdots, \varphi_{nn} \end{vmatrix} \tag{23}$$

nel quale le c_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, k)$ sono delle costanti; mentre le φ_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = k + 1, \cdots, n)$ sono delle funzioni riascuna dipendente dal solo parametro il cui indice coincide col secondo indice della φ_{ij}. Il potenziale delle forze in questo caso è dato da

$$U = \sum_1^k{}_s\, b_s\, \varphi^{ns} + \sum_{k+1}^n{}_s\, U_s(x_s)\, \varphi^{ns}, \tag{24}$$

dove la b_s sono costanti, ed esso dipende solo dai parametri $x_{k+1}, \cdots, x_n$.

Anche in questo caso le equazioni canoniche ammettono k integrali lineari nei momenti

$$p_i = \sum_1^k{}_s\, \alpha_s\, X_i^{(s)}(x_i), \qquad (i = 1, 2, \cdots, k), \tag{25}$$

ed $n - k$ integrali quadratici

$$\frac{1}{2}\left[p_i - \sum_1^k{}_s\, \alpha_s\, X_i^{(s)}\right]^2 - U_i = h\varphi_{ni} + \sum_1^{n-1}{}_j\, \beta_j\, \varphi_{ji}, \qquad (i = k + 1, \cdots, w), \tag{26}$$

dove le α_s sono delle costanti che si possono assumere ad arbitrio, e le β_j sono pure $n - 1$ costanti legate alle α_s, alle costanti del problema e alla costante h dell'energia dalle relazioni [3].

$$2\left(b_i + hc_{ni} + \sum_1^{n-1}{}_j\, \beta_j\, c_{ji}\right) = \alpha_i^2, \qquad (i = 1, 2, \cdots, k). \tag{27}$$

Delle costanti β_j se ne possono dunque fissare ad arbitrio $n - k - 1$.

Anche in questo caso, risolvendo le (25) rispetto alle costanti α_s, e introducendo i nuovi momenti

$$\pi_s = \sum_1^k{}_i\, \frac{B_{is}}{B}\, p_i, \qquad (s = 1, 2, \cdots, k), \tag{23}$$

la trasformazione puntuale definita da relazioni analoghe alle (18), trasforma la seconda soluzione considerata in quella di un sistema canonico con funzione caratteristica avente k coordinate ignorabili.

In questo secondo caso gli elementi reciproci a^{ij} dei coefficienti a_{ij}, dell'energia cinetica sono

$$a^{ij} = \sum_1^k {}_s \frac{B_{is}\,B_{js}}{B^2}\,\varphi^{ns} + \sum_1^k {}_s \frac{B_{is}}{B}\sum_{k+1}^n {}_l \sum_1^k {}_r \frac{B_{jr}}{B}\,X_l^{(r)}\,X_l^{(s)}\,\varphi^{nl},$$

$$(29)\qquad a^{ij} = -\,\varphi^{ni}\sum_1^k {}_s X_i^{(s)}\,\frac{B_{js}}{B}, \qquad (i = k+1,\cdots,n\,;\,j = 1,2,\cdots,j),$$

$$a^{ii} = \varphi^{ni}, \quad (i = k+1,\cdots,n);\ a^{ij} = 0\,,\,(i\,,j = k+1,\cdots,n\,;\,j \neq i)$$

e si ha

$$(T_1) = \frac{1}{2}\sum_1^k {}_s \alpha_s^2\,\varphi^{ns} + \frac{1}{2}\sum_{k+1}^n {}_l \varphi^{nl}\sum_1^k {}_{rs}\,\alpha_r\,\alpha_s\,X_l^{(r)}\,X_l^{(s)},$$

$$(T_2) = -\sum_{k+1}^n {}_i \varphi^{ni}\,p_i\sum_1^k {}_s \alpha_s\,X_i^{(s)},\quad (T_3) = \frac{1}{2}\sum_{k+1}^n {}_i \varphi^{ni}\,p_i^2\,.$$

La funzione hamiltoniana ridotta risulta quindi

$$(30)\qquad \mathscr{H} = \frac{1}{2}\sum_1^k {}_s \alpha_s^2\,\varphi^{ns} + \frac{1}{2}\sum_{k+1}^n {}_i \varphi^{ni}\left[p_i - \sum_1^k {}_s \alpha_s\,X_i^{(s)}\right]^2 - $$
$$- \left[\sum_1^k {}_s b_s\,\varphi^{ns} + \sum_{k+1}^n {}_s U_s(x_s)\,\varphi^{ns}\right],$$

e il sistema canonico ridotto, che è analogo al sistema (20), è di rango $2(n-k)$ ed ammette gli integrali quadratici (26). In virtù di essi il sistema, come sappiamo si integra con quadrature [3].

Da quegli integrali segue anche facilmente l'integrale dell'energia. Invero, moltiplicando ambo i membri della (26) per φ^{ni}, e sommando rispetto all'indice i da $k+1$ ad n, si ottiene

$$(31)\qquad \frac{1}{2}\sum_{k+1}^n {}_i \varphi^{ni}\left[p_i - \sum_1^k {}_s \alpha_s\,X_i^{(s)}\right]^2 - \sum_{k+1}^n {}_i \varphi^{ni}\,U_i =$$
$$= \sum_{k+1}^n {}_i \varphi^{ni}\left[h\varphi_{ni} + \sum_1^{n-1} {}_j \beta_j\,\varphi_{ji}\right].$$

Ora, posto $\Phi_i = h\varphi_{ni} + \sum_1^{n-1} {}_j \beta_j\,\varphi_{ji}$, possiamo scrivere

$$\sum_{k+1}^n {}_i \varphi^{ni}\,\Phi_i = \sum_1^n {}_i \varphi^{ni}\,\Phi_i - \sum_1^k {}_i \varphi^{ni}\,\Phi_i;$$

ma è [3]:

$$\sum_1^n {}_i \varphi^{ni}\,\Phi_i = h\,;\ \Phi_i = \frac{1}{2}(\alpha_i^2 - 2b_i), \qquad \text{per} \quad i = 1,2,\cdots,k,$$

perciò la (31) diventa

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{k+1}^{n}{}_i\, \varphi^{ni}\left[p_i - \sum_{1}^{k}{}_s\, \alpha_s\, X_i^{(s)}\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{k}{}_i\, \alpha_i^2\, \varphi^{ni} - \\ - \left[\sum_{1}^{k}{}_i\, b_i\, \varphi^{ni} + \sum_{k+1}^{n}{}_i\, \varphi^{ni}\, U_i\right] = h, \tag{32}$$

che è proprio l'integrale dell'energia.

RIFERIMENTI

[1] C. AGOSTINELLI (1937) – *Sopra l'integrazione per separazione di variabili dell'equazione dinamica di Hamilton–Jacobi*. «Memorie R. Accademia delle Scienze di Torino», ser. II, *69*, Parte I.

[2] C. AGOSTINELLI (1936–37) – *Sulle equazioni di Hamilton–Jacobi integrabili per separazione di variabili*, «Atti R. Istituto Veneto», *96*, Parte II.

[3] C. AGOSTINELLI (1974) – *Su nuovi casi di integrabilità per separazione di variabili dell'equazione dinamica di Hamilton–Jacobi*. «Rend. Accad. Naz. dei Lincei» (8), *57*, 391–398, 619–623.

[4] E. T. WHITTAKER (1927) – *Analytical Dynamics*, Chap. XI, n. 132. Cambridge–University Press.