Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanna Boschi Pettini

Integrazione, in seconda approssimazione, di equazioni della meccanica a coefficienti lentamente variabili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.5, p. 729–737.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_5_729_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Meccanica. — *Integrazione, in seconda approssimazione, di equazioni della meccanica a coefficienti lentamente variabili.* Nota di GIOVANNA BOSCHI PETTINI (*), presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — In this paper the problem of the small oscillations of a mechanical or electric system, with two degrees of freedom and some of the involved parameters slowly varying with time, is analysed. An approximate solution, valid in a vary large time interval, is obtained.

1. In alcune Note precedenti [1], [2], [3], ho considerato i piccoli moti, intorno ad una posizione di equilibrio stabile, di un sistema meccanico a vincoli lentamente variabili col tempo e soggetto a forze derivanti da un potenziale, eventualmente anch'esso lentamente variabile col tempo. Più precisamente, ricordo che per vincoli lentamente variabili col tempo intendo le equazioni che li rappresentano funzioni, oltre che delle coordinate lagrangiane, anche ed esplicitamente del tempo t tramite una variabile, detta degli Autori russi « tempo lento », $\tau = \varepsilon t$ dove ε è un numero positivo molto piccolo, inoltre suppongo il potenziale dipendente, oltre che dalle variabili lagrangiane, esplicitamente da τ (1).

Prendendo in considerazione un sistema meccanico a due gradi di libertà e riferendo il sistema a coordinate normali Q_1, Q_2, si giunge (cfr. [2]) alle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} &\ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = \varepsilon\lambda\dot{Q}_2 + \varepsilon^2 F_1(Q_1, Q_2) \\ &\ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = -\varepsilon\lambda\dot{Q}_1 + \varepsilon^2 F_2(Q_1, Q_2) \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \lambda(\tau)$ sono funzioni note (le due prime positive) di $\tau \in (0, L)$ (cioè per $t \in (0, L/\varepsilon)$), di classe $C^{(1)}$ in $(0, L)$, mentre $F_1(Q_1, Q_2)$ e $F_2(Q_1, Q_2)$ hanno espressione (con notazione diversa da quella usata nelle Note citate):

$$F_1(Q_1, Q_2) = \gamma_{11} Q_1 + \gamma_{12} Q_2 + \delta_{11} \quad ; \quad F_2(Q_1, Q_2) = \gamma_{21} Q_1 + \gamma_{22} Q_2 + \delta_{22} \tag{2}$$

dove le γ e δ sono funzioni di classe $C^{(1)}$ di $\tau \in (0, L)$.

Si noti che equazioni del tipo (1) si ritrovano anche per circuiti elettrici accoppiati con caratteristiche lentamente variabili nel tempo. È bene anche osservare che se i vincoli e il potenziale non dipendessero da τ sarebbe, ovviamente, $\varepsilon = 0$, ω_1 e ω_2 costanti e ω_1, ω_2 sarebbero le frequenze proprie del

(*) Nella seduta del 10 maggio 1975.

(1) Per maggiori chiarimenti cfr. Nota [1].

sistema. Ora, poiché ω_1 e ω_2 variano molto lentamente col tempo, continueremo a chiamarle frequenze proprie del sistema [2].

Nella Nota [2], per risolvere il sistema (1), applicando in sostanza il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, ho posto:

$$(3) \qquad Q_1 = \frac{u_1}{\sqrt{\omega_1}} \operatorname{sen} \theta_1 + \frac{v_1}{\sqrt{\omega_1}} \cos \theta_1 \quad ; \quad Q_2 = \frac{u_2}{\sqrt{\omega_2}} \operatorname{sen} \theta_2 + \frac{v_2}{\sqrt{\omega_2}} \cos \theta_2$$

$$(4) \qquad \dot{Q}_1 = \sqrt{\omega_1}\, u_1 \cos \theta_1 - \sqrt{\omega_1}\, v_1 \operatorname{sen} \theta_1 \quad , \quad \dot{Q}_2 = \sqrt{\omega_2}\, u_2 \cos \theta_2 - \sqrt{\omega_2}\, v_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

dove le u, v, sono funzioni del tempo e:

$$(5) \qquad \theta_1 = \int_0^t \omega_1 \, dt \quad ; \quad \theta_2 = \int_0^t \omega_2 \, dt,$$

ed ho dimostrato che, se ε è abbastanza piccolo, per $t \in (0, L/\varepsilon)$, cioè anche per un intervallo di tempo molto lungo, si ha (u_{i_0}, v_{i_0}, $i = 1, 2$ valori iniziali di u, v facilmente calcolabili con i valori iniziali delle Q e loro derivate $\dot{Q}$):

$$(6) \qquad u_i = u_{i_0} + O(\varepsilon) \quad ; \quad v_i = v_{i_0} + O(\varepsilon) \qquad i = 1, 2.$$

Ricordando che per $O(\varepsilon^n)$ si intende una funzione di t maggiorata in valore assoluto da una costante positiva moltiplicata per ε^n, le (6) ci dicono che, nell'intervallo di tempo $(0, L/\varepsilon)$, se si ritengono u_i e v_i costanti si determinano in corrispondenza le Q_i con un errore dell'ordine di ε, cioè si determinano le Q_i in prima approssimazione.

Come si vede, Q_1 e Q_2 risultano, in sostanza, funzioni sinusoidali di frequenza ω_1 e ω_2, sia pure lentamente variabili col tempo.

In questa Nota [3] mi sono proposta di determinare i valori delle u_i e v_i con un errore dell'ordine di ε^2, sempre per $t \in (0, L/\varepsilon)$.

Si ottiene, in tal modo, una soluzione ovviamente più complicata delle (1), ma la migliore approssimazione può permettere di porre in evidenza proprietà, forse di qualche interesse, di questo sistema.

Noi otterremo questi risultati supposto, per ogni $\tau \in (0, L)$, $|\omega_1 - \omega_2| > a$, $|3\omega_1 - \omega_2| > a$, $|3\omega_2 - \omega_1| > a$, dove a è un numero positivo, indipendente da ε e grande rispetto ai valori che si attribuiscono ad ε.

2. Le equazioni a cui soddisfano u_1 e v_1 sono le seguenti [4].

$$(7) \qquad \dot{u}_1 = -\frac{\dot{\omega}_1}{2\omega_1}(u_1 \cos 2\theta_1 - v_1 \operatorname{sen} 2\theta_1) +$$
$$+ \varepsilon\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,(u_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - v_2 \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + \varepsilon^2 \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\omega_1}} F_1(Q_1, Q_2),$$

(2) Anche questa nozione è precisata in [1].

(3) Per i sistemi a un grado di libertà la questione è risolta nella [3].

(4) In questa Nota si è preferito scrivere $\dot{\omega}_1$ e $\dot{\omega}_2$ in luogo dei simboli $\varepsilon\omega_1'$, $\varepsilon\omega_2'$ usati in [2].

$$\dot{v}_1 = \frac{\dot{\omega}_1}{2\omega_1}(u_1 \operatorname{sen} 2\,\theta_1 + v_1 \cos 2\,\theta_1) - \tag{8}$$

$$- \varepsilon\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,(u_2 \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - v_2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) - \varepsilon^2 \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\sqrt{\omega_1}} \mathrm{F}_1(\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2) .$$

Posto:

$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 \quad , \quad \beta = \theta_1 - \theta_2 \quad , \quad \Omega_1 = \omega_1 + \omega_2 \quad , \quad \Omega_2 = \omega_1 - \omega_2 \, , \tag{9}$$

si ha:

$$\dot{u}_1 = -\frac{\dot{\omega}_1}{2\omega_1}(u_1 \cos 2\,\theta_1 - v_1 \operatorname{sen} 2\,\theta_1) + \tag{10}$$

$$+ \frac{\varepsilon\lambda}{2} \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,(u_2 \cos \alpha + u_2 \cos \beta - v_2 \operatorname{sen} \alpha + v_2 \operatorname{sen} \beta) + \varepsilon^2 \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\omega_1}} \mathrm{F}_1(\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2) .$$

$$\dot{v}_1 = \frac{\dot{\omega}_1}{2\omega_1}(u_1 \operatorname{sen} 2\,\theta_1 + v_1 \cos 2\,\theta_1) - \tag{11}$$

$$- \frac{\varepsilon\lambda}{2} \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,(u_2 \operatorname{sen} \alpha + u_2 \operatorname{sen} \beta + v_2 \cos \alpha - v_2 \cos \beta) - \varepsilon^2 \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\sqrt{\omega_1}} \mathrm{F}_1(\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2) .$$

Le equazioni a cui soddisfano u_2 e v_2 si ottengono da quelle già scritte (10), (11), scambiando u_1 con u_2, v_1 con v_2, λ con $-\lambda$, ω_1 con ω_2, θ_1 con θ_2 e infine F_1 con F_2. si ha quindi (poiché, per le (9), α resta invariata, β diventa $-\beta$):

$$\dot{u}_2 = -\frac{\dot{\omega}_2}{2\omega_2}(u_2 \cos 2\,\theta_2 - v_2 \operatorname{sen} 2\,\theta_2) - \tag{12}$$

$$- \frac{\varepsilon\lambda}{2} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}\,(u_1 \cos \alpha - v_1 \operatorname{sen} \alpha + u_1 \cos \beta - v_1 \operatorname{sen} \beta) + \varepsilon^2 \frac{\cos \theta_2}{\sqrt{\omega_2}} \mathrm{F}_2(\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{\dot{\omega}_2}{2\omega_2}(u_2 \operatorname{sen} 2\,\theta_2 + v_2 \cos 2\,\theta_2) + \tag{13}$$

$$+ \frac{\varepsilon\lambda}{2} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}\,(u_1 \operatorname{sen} \alpha + v_1 \cos \alpha - u_1 \operatorname{sen} \beta - v_1 \cos \beta) - \varepsilon^2 \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{\sqrt{\omega_2}} \mathrm{F}_2(\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2) .$$

Per integrare, in via approssimata, queste equazioni sono necessarie alcune relazioni che andiamo a stabilire.

3. Ricordiamo anzitutto che, se $m \geq n \geq 1$ risulta $\mathrm{O}(\varepsilon^n) + \mathrm{O}(\varepsilon^m) = \mathrm{O}(\varepsilon^n)$, $\mathrm{O}(\varepsilon^n)\,\mathrm{O}(\varepsilon^m) = \mathrm{O}(\varepsilon^{n+m})$, e che l'integrale in $(0, t)$, con $t \in (0, \mathrm{L}/\varepsilon)$, di una funzione $\mathrm{O}(\varepsilon^n)$ è $\mathrm{O}(\varepsilon^{n-1})$.

Sia $\varphi(t)$ una funzione $\mathrm{O}(\varepsilon^n)$ nell'intervallo di tempo $(0, \mathrm{L}/\varepsilon)$, con derivata $\frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{O}(\varepsilon^{n+1})$ nel medesimo intervallo. Supposto, per $t \in (0, \mathrm{L}/\varepsilon)$, $|p\omega_1 + q\omega_2| > a$, con a numero positivo grande rispetto ad ε, (p, q interi), valgono le seguenti formule:

$$\int_0^t \varphi(t) \cos(p\theta_1 + q\theta_2)\, dt = \mathrm{O}(\varepsilon^n) \quad ; \quad \int_0^t \varphi(t) \operatorname{sen}(p\theta_1 + q\theta_2)\, dt = \mathrm{O}(\varepsilon^n). \tag{14}$$

Dimostriamo la prima delle (14); in modo analogo si procede per la seconda. Si ha:

$$(15) \qquad \int_0^t \varphi(t) \cos(p\theta_1 + q\theta_2)\, dt = \int_0^t \frac{\varphi(t)}{p\omega_1 + q\omega_2} \frac{d}{dt} \operatorname{sen}(p\theta_1 + q\theta_2)\, dt =$$

$$= \left[\frac{\varphi(t)}{p\omega_1 + q\omega_2} \operatorname{sen}(p\theta_1 + q\theta_2)\right]_0^t - \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{p\omega_1 + q\omega_2}\right) \operatorname{sen}(p\theta_1 + q\theta_2)\, dt\,.$$

Ora, il primo termine all'ultimo membro di (15) è $O(\varepsilon^n)$ in quanto prodotto di $\varphi(t)$, che è $O(\varepsilon^n)$, per la funzione limitata $\dfrac{\operatorname{sen}(p\theta_1 + q\theta_2)}{p\omega_1 + q\omega_2}$, per la stessa ragione nel secondo termine la funzione integranda è $O(\varepsilon^{n+1})$ e quindi l'integrale è $O(\varepsilon^n)$. Si deduce quindi la prima delle (14). Come conseguenza delle (14) si ha, posto $p = 2$, $q = 0$:

$$(16) \qquad \int_0^t \varphi(t) \cos 2\,\theta_1\, dt = O(\varepsilon^n) \quad , \quad \int_0^t \varphi(t) \operatorname{sen} 2\,\theta_1\, dt = O(\varepsilon^n)\,,$$

da cui si ha anche, essendo $\operatorname{sen} 2\,\theta_1 \cos 2\,\theta_1 = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4\,\theta_1$:

$$(17) \qquad \int_0^t \varphi(t) \operatorname{sen} 2\,\theta_1 \cos 2\,\theta_1\, dt = O(\varepsilon^n)\,;$$

e queste formule valgono anche sostituendo θ_2 a θ_1.

Per le formule di prostaferesi si ha poi, ricordando la (9):

$$\cos 2\,\theta_1 \cos \alpha = \frac{1}{2}\left[\cos(3\,\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

$$\cos 2\,\theta_1 \cos \beta = \frac{1}{2}\left[\cos(3\,\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2)\right],$$

quindi, poiché per ipotesi $|\omega_1 - \omega_2| > a$, $|3\,\omega_1 - \omega_2| > a$, $|3\,\omega_2 - \omega_1| > a$, si ha anche (sostituendo nelle equazioni sopra scritte a uno o ambedue i coseni i seni del medesimo argomento):

$$(18) \qquad \int_0^t \varphi(t) \begin{smallmatrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{smallmatrix} 2\,\theta_1 \begin{smallmatrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{smallmatrix} \alpha\, dt = O(\varepsilon^n) \quad ; \quad \int_0^t \varphi(t) \begin{smallmatrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{smallmatrix} 2\,\theta_1 \begin{smallmatrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{smallmatrix} \beta\, dt = O(\varepsilon^n)\,,$$

dove il simbolo $\begin{smallmatrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{smallmatrix} 2\,\theta_1 \begin{smallmatrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{smallmatrix} \alpha$ indica uno qualsiasi dei prodotti fra $\cos 2\,\theta_1$, $\operatorname{sen} 2\theta_1$, $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$ e analogamente per il simbolo che compare nella seconda di (18). Formule analoghe valgono poi sostituendo a θ_1, θ_2.

Si ha poi (applicando ancora le formule di prostaferesi e tenendo conto che $\alpha + \beta = \omega_1 + \omega_2$, $\alpha - \beta = \omega_1 - \omega_2$ e $|\omega_1 - \omega_2| > a$):

$$(19) \qquad \int_0^t \varphi(t) \begin{smallmatrix}\cos\\ \text{sen}\end{smallmatrix} \alpha \begin{smallmatrix}\cos\\ \text{sen}\end{smallmatrix} \beta \, dt = O(\varepsilon^n) \quad , \quad \int_0^t \varphi(t) \cos\alpha \ \text{sen}\, \alpha \, dt = O(\varepsilon^n) ,$$

$$\int_0^t \varphi(t) \cos\beta \ \text{sen}\, \beta \, dt = O(\varepsilon^n) ,$$

dove il simbolo $\begin{smallmatrix}\cos\\ \text{sen}\end{smallmatrix} \alpha \begin{smallmatrix}\cos\\ \text{sen}\end{smallmatrix} \beta$ indica ancora uno qualsiasi dei prodotti fra $\cos\alpha$, $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\beta$, $\text{sen}\,\beta$.

Ora si noti che, sempre per la (14):

$$\int_0^t \varphi(t) \cos^2(p\theta_1 + q\theta_2) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^t \varphi(t) \left[1 + \cos 2(p\theta_1 + q\theta_2)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \varphi(t) \, dt + O(\varepsilon^n) ,$$

e poiché la stessa formula finale vale sostituendo il seno al coseno si ha, (col solito significato dei simboli), sempre per $|p\omega_1 + q\omega_2| > a$:

$$\int_0^t \varphi(t) \begin{smallmatrix}\cos^2\\ \text{sen}^2\end{smallmatrix} 2\theta_1 \, dt = \frac{1}{2} \int_0^t \varphi(t) \, dt + O(\varepsilon^n)$$

$$(20) \qquad \int_0^t \varphi(t) \begin{smallmatrix}\cos^2\\ \text{sen}^2\end{smallmatrix} \alpha \, dt = \frac{1}{2} \int_0^t \varphi(t) \, dt + O(\varepsilon^n) ;$$

$$\int_0^t \varphi(t) \begin{smallmatrix}\cos^2\\ \text{sen}^2\end{smallmatrix} \beta \, dt = \frac{1}{2} \int_0^t \varphi(t) \, dt + O(\varepsilon^n) .$$

Da queste relazioni se ne possono trarre altre, utili per il seguito, che ora andiamo a stabilire.

Si moltiplichi $\dot{u}_1$, dato dalla (10), per $\dfrac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2} \text{sen}\, 2\theta_1$ e si integri fra 0 e t.

In questo caso, poiché $\dfrac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2} = O(\varepsilon)$ e poiché il prodotto di due funzioni $O(\varepsilon)$ è $O(\varepsilon^2)$, gli integrali dei termini in λ sono, per le (18), $O(\varepsilon^2)$; l'ultimo integrale è poi l'integrale di una funzione $O(\varepsilon^3)$ e quindi è $O(\varepsilon^2)$. Si ha così, ricordando anche la (17) e poi la prima di (20) e le (6):

$$(21)\quad \int_0^t \frac{\dot\omega_1}{4\omega_1^2}\,\dot u_1 \operatorname{sen} 2\theta_1\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{\dot\omega_1^2}{8\omega_1^3}\,v_1 \operatorname{sen}^2 2\theta_1\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(\varepsilon^2) = \frac{1}{2}\,v_{10}\int_0^t \frac{\dot\omega_1^2}{8\omega_1^3}\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(\varepsilon^2).$$

In modo analogo si ha anche:

$$(22)\quad \int_0^t \frac{\dot\omega_1}{4\omega_1^2}\,\dot v_1 \cos 2\,\theta_1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,v_{10}\int_0^t \frac{\dot\omega_1^2}{8\omega_1^3}\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(\varepsilon^2).$$

Si ha poi, tenuto conto dell'espressione di $\dot u_2$, $\dot v_2$, (12) e (13), e delle considerazioni fatte:

$$(23)\quad \int_0^t \frac{\varepsilon\lambda}{2}\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,\frac{1}{\Omega_1}\,(\operatorname{sen}\alpha\,\dot u_2 + \cos\alpha\,\dot v_2)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^t \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{4\Omega_1}\,(v_1 \operatorname{sen}^2\alpha + v_1\cos^2\alpha)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(\varepsilon^2) = v_{10}\int_0^t \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{4\Omega_1}\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(\varepsilon^2);$$

e in modo analogo:

$$(24)\quad \int_0^t \frac{\varepsilon\lambda}{2}\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,\frac{1}{\Omega_2}\,(\operatorname{sen}\beta\,\dot u_2 - \cos\beta\,\dot v_2)\,\mathrm{d}t = v_{10}\int_0^t \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{4\Omega_2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(\varepsilon^2).$$

4. Ciò posto, consideriamo i primi due termini nell'espressione (10) di $\dot u_1$. Si può scrivere:

$$(25)\quad -\frac{\dot\omega_1}{2\omega_1}(u_1\cos 2\theta_1 - v_1 \operatorname{sen} 2\theta_1) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\dot\omega_1}{4\omega_1^2}(u_1 \operatorname{sen} 2\theta_1 + v_1\cos 2\theta_1)\right] +$$

$$+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot\omega_1}{4\omega_1^2}\right)(u_1 \operatorname{sen} 2\theta_1 + v_1\cos 2\theta_1) + \frac{\dot\omega_1}{4\omega_1^2}(\dot u_1 \operatorname{sen} 2\theta_1 + \dot v_1 \cos 2\theta_1).$$

Integriamo la (25) in $(0, t)$. Poiché $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot\omega_1}{4\omega_1^2}\right) u_1$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot\omega_1}{4\omega_1^2}\right) v_1$ sono $\mathrm{O}(\varepsilon^2)$ e la loro derivata è $\mathrm{O}(\varepsilon^3)$, l'integrale del secondo addendo di (25) è, per le (16), un $\mathrm{O}(\varepsilon^2)$. Quanto all'integrale dell'ultimo addendo, esso si calcola mediante le (21) e (22). Quindi, a meno di termini $\mathrm{O}(\varepsilon^2)$, si ha:

$$(26)\quad \int_0^t -\frac{\dot\omega_1}{2\omega_1}(u_1\cos 2\theta_1 - v_1 \operatorname{sen} 2\theta_1)\,\mathrm{d}t =$$

$$-\frac{\dot\omega_1}{4\omega_1^2}(u_{10} \operatorname{sen} 2\theta_1 + v_{10}\cos 2\theta_1) + v_{10}\left(\frac{\dot\omega_1}{4\omega_1^2}\right)_0 + v_{10}\int_0^t \frac{\dot\omega_1^2}{8\omega_1^3}\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(\varepsilon^2).$$

Consideriamo ora il complesso dei termini in λ nell'espressione (10) di $\dot{u}_1$. Si ha:

$$(27) \qquad \frac{\varepsilon\lambda}{2}\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,(u_2 \cos\alpha + u_2 \cos\beta - v_2 \operatorname{sen}\alpha + v_2 \operatorname{sen}\beta) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\left\{\lambda\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\left[\frac{1}{\Omega_1}(\operatorname{sen}\alpha\, u_2 + \cos\alpha v_2) + \frac{1}{\Omega_2}(\operatorname{sen}\beta u_2 - \cos\beta\, v_2)\right]\right\} -$$

$$- \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\lambda\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,\frac{1}{\Omega_1}\right)(\operatorname{sen}\alpha u_2 + \cos\alpha\, v_2) +\right.$$

$$\left. + \frac{d}{dt}\left(\lambda\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,\frac{1}{\Omega_2}\right)(\operatorname{sen}\beta u_2 - \cos\beta v_2)\right] -$$

$$- \frac{\varepsilon\lambda}{2}\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\left[\frac{1}{\Omega_1}(\operatorname{sen}\alpha\dot{u}_2 + \cos\alpha\dot{v}_2) + \frac{1}{\Omega_2}(\operatorname{sen}\beta\dot{u}_2 - \cos\beta\dot{v}_2)\right].$$

Ora, posto $\varphi(t) = \frac{d}{dt}\left(\lambda\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,\frac{1}{\Omega_i}\right)u_2$ o $\varphi(t) = \frac{d}{dt}\left(\lambda\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,\frac{1}{\Omega_i}\right)v_2$ $(i = 1, 2)$, si ha, integrando fra 0 e t, che gli integrali del secondo e terzo addendo a secondo membro di (27) sono $O(\varepsilon^2)$, in quanto, per le (6), del tipo (14), e perciò trascurabili nelle nostre approssimazioni. Per gli ultimi due addendi, applicando (23) e (24), si ha:

$$\int_0^t -\frac{\varepsilon\lambda}{2}\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\left[\frac{1}{\Omega_1}(\operatorname{sen}\alpha\dot{u}_2 + \cos\alpha\dot{v}_2) + \frac{1}{\Omega_2}(\operatorname{sen}\beta\dot{u}_2 - \cos\beta\dot{v}_2)\right]dt =$$

$$= -v_{10}\int_0^t \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{4\Omega_1}\,dt - v_{10}\int_0^t \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{4\Omega_2}\,dt + O(\varepsilon^2) =$$

$$= -\frac{1}{4}v_{10}\,\varepsilon^2\int_0^t \lambda^2\,\frac{\Omega_1+\Omega_2}{\Omega_1\Omega_2}\,dt + O(\varepsilon^2).$$

Si ha così:

$$(28) \qquad \frac{1}{2}\varepsilon\int_0^t \lambda\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\,(u_2\cos\alpha + u_2\cos\beta - v_2\operatorname{sen}\alpha + v_2\operatorname{sen}\beta)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\lambda\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\left[\frac{1}{\Omega_1}(\operatorname{sen}\alpha u_{20} + \cos\alpha v_{20}) + \frac{1}{\Omega_2}(\operatorname{sen}\beta u_{20} - \cos\beta v_{20})\right] -$$

$$- \frac{1}{2}\lambda\,\varepsilon\left(\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\right)_0 v_{20}\left(\frac{\Omega_2-\Omega_1}{\Omega_1\Omega_2}\right)_0 - \frac{1}{4}v_{10}\,\varepsilon^2\int_0^t \lambda^2\,\frac{\Omega_1+\Omega_2}{\Omega_1\Omega_2}\,dt + O(\varepsilon^2).$$

Passiamo, infine, al calcolo dell'ultimo termine di $\dot{u}_1$. Si ha, per le (2) e (3):

$$(29) \qquad \varepsilon^2\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{\omega_1}}\,F_1(Q_1, Q_2) =$$

$$= \varepsilon^2\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{\omega_1}}\left(\gamma_{11}\frac{u_1}{\sqrt{\omega_1}}\operatorname{sen}\theta_1 + \gamma_{11}\frac{v_1}{\sqrt{\omega_1}}\cos\theta_1 + \gamma_{12}\frac{u_2}{\sqrt{\omega_2}}\operatorname{sen}\theta_2 + \gamma_{12}\frac{v_2}{\sqrt{\omega_2}}\cos\theta_2 + \delta_{11}\right).$$

Integrando fra o e t, si ha che gli integrali dei termini in sen $\theta_1 \cos \theta_1$, sen $\theta_2 \cos \theta_1$, $\cos \theta_1 \cos \theta_2$, $\cos \theta_1$, sono, per le (16), (19), tutti $O(\varepsilon^2)$.

Si ha allora, per le (20):

$$\varepsilon^2 \int_0^t \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\omega_1}} F_1(Q_1, Q_2)\, dt = \varepsilon^2 \frac{v_{10}}{2} \int_0^t \frac{\gamma_{11}}{\omega_1} dt + O(\varepsilon^2). \tag{30}$$

Si ottiene quindi per u_1 la seguente espressione:

$$\begin{aligned} u_1 = {} & u_{10} - \frac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2}(u_{10} \operatorname{sen} 2\theta_1 + v_{10} \cos 2\theta_1) + v_{10} \left(\frac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2}\right)_0 + \\ & + v_{10} \int_0^t \frac{\dot{\omega}_1^2}{8\omega_1^3} dt + \frac{1}{2} \varepsilon\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \left[\frac{1}{\Omega_1}(\operatorname{sen} \alpha u_{20} + \cos \alpha\, v_{20}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Omega_2}(\operatorname{sen} \beta u_{20} - \cos \beta v_{20})\right] - \frac{1}{2} \varepsilon \left(\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\right)_0 v_{20} \left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_1 \Omega_2}\right)_0 - \\ & - \frac{1}{4} v_{10} \varepsilon^2 \int_0^t \lambda^2 \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 \Omega_2} dt + \varepsilon^2 \frac{v_{10}}{2} \int_0^t \frac{\gamma_{11}}{\omega_1} dt + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{31}$$

Per determinare v_1 è bene notare che, ponendo nelle equazioni (10) e (11) in $\dot{u}_1$, $\dot{v}_1$, $\theta_1 = \theta_1' + \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \theta_2' + \frac{\pi}{2}$, e ponendo inoltre v_i in luogo di u_i e $-u_i$ in luogo di v_i ($i = 1, 2$), le equazioni restano le stesse. Perciò v_1 è espressa dalla (31) purché si ponga θ_i' in luogo di θ_i, v_{i_0} in luogo di u_{i_0} e $-u_{i_0}$ in luogo di v_{i_0}. Si ha così, con semplici passaggi, rimettendo poi θ_i in luogo di θ_i' (5).

$$\begin{aligned} v_1 = {} & v_{10} + \frac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2}(v_{10} \operatorname{sen} 2\theta_1 - u_{10} \cos 2\theta_1) + u_{10} \left(\frac{\dot{\omega}_1}{4\omega_1^2}\right)_0 - \\ & - u_{10} \int_0^t \frac{\dot{\omega}_1^2}{8\omega_1^3} dt - \frac{1}{2} \varepsilon\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \left[\frac{1}{\Omega_1}(\operatorname{sen} \alpha v_{20} - \cos \alpha u_{20}) + \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Omega_2}(\operatorname{sen} \beta v_{20} + \cos \beta u_{20})\right] - \frac{1}{2} \varepsilon \left(\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}\right)_0 u_{20} \left(\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{\Omega_1 \Omega_2}\right)_0 + \\ & + \frac{1}{4} u_{10} \varepsilon^2 \int_0^t \lambda^2 \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 \Omega_2} dt - \varepsilon^2 \frac{u_{10}}{2} \int_0^t \frac{\gamma_{11}}{\omega_1} dt + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{32}$$

Con opportuni scambi si possono ora trovare u_2 e v_2 e quindi, con le (3), (4), le Q.

(5) Il cambiamento di segno nel terzo e quinto termine di (32) si spiega tenendo presente che $\lim_{t \to 0} \cos 2\theta_1' = \lim_{t \to 0} \cos(\theta_1' + \theta_1'') = \cos \pi = -1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOSCHI PETTINI GIOVANNA (1972) – *Integrazione di alcune equazioni della meccanica mediante gli invarianti adiabatici*, « Bollettino U.M.I. », 5, 301–314.

[2] BOSCHI PETTINI GIOVANNA (1972) – *Su alcune formule approssimate per i sistemi meccanici non autonomi*. Nota I e II, « Atti Accad. Naz. Lincei », (8) *53*, 133–143.

[3] BOSCHI PETTINI GIOVANNA (1974) – *Sull'integrazione approssimata di alcune equazioni della meccanica*, « Atti Accad. Naz. Lincei », (8), *55*, 72–78.