Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alberto Del Fra

Sugli spazi G-ANR

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.5, p. 723–728.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_5_723_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Topologia. — *Sugli spazi* G–ANR (*). Nota di ALBERTO DEL FRA, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — Definitions, functional and homotopic properties of G–ANR spaces are studied.

R. Palais [6] ha considerato spazi G–ANR, cioè G-spazi (spazi topologici sui quali agisce un gruppo topologico G), che, nella loro categoria, ove i morfismi sono dunque rappresentazioni continue « equivarianti » (cioè conservanti l'azione di G), sono analoghi ai « retratti assoluti d'intorno » (cosiddetti spazi ANR, il cui interesse è ben noto in topologia).

In questo lavoro indaghiamo alcune proprietà di tali spazi G-ANR. In primo luogo (§ 1) mostriamo come due classiche definizioni equivalenti di spazi ANR, si trasportino in due definizioni ancora equivalenti per spazi G–ANR, nell'ipotesi che il gruppo G sia finito.

Nel § 2 passiamo a considerare lo spazio funzionale X^C delle applicazioni di uno spazio compatto C in uno spazio G–ANR X, e estendiamo a questo caso, in due modi diversi, il risultato di Kuratowski secondo cui X^C è ancora ANR.

Infine nel § 3 consideriamo omotopie equivarianti (G–omotopie) e stabiliamo che gli spazi G–ANR (G finito) soddisfano alla proprietà di estensione delle G–omotopie, estendendo così un risultato di Hurewicz–Wallman per gli spazi ANR.

§ 1. DEFINIZIONI EQUIVALENTI DI G–ANR

Com'è noto la nozione di ANR può essere applicata sia a spazi metrici separabili che più in generale a spazi normali. Ci occuperemo del primo caso e quindi, senz'altra avvertenza, nel seguito *ogni spazio sarà supposto metrico separabile*.

Sia $\mathfrak{M}$ la categoria degli spazi metrici separabili con morfismi le applicazioni continue e G–$\mathfrak{M}$ la categoria dei G–spazi metrici separabili con morfismi le applicazioni continue equivarianti. Ricordiamo che nella categoria $\mathfrak{M}$ le seguenti due proposizioni relative ad un oggetto X sono equivalenti (1):

a) X è tale che, assegnati ad arbitrio una coppia (Y , A), con A sottospazio chiuso di Y, e un morfismo $f : A \to X$, esiste un intorno aperto E di A

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca del C.N.R., « Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni ».

(**) Nella seduta del 10 maggio 1975.

(1) Cfr. per esempio [5], p. 273.

in Y sul quale sia definita un'estensione di $f, f^* : E \to X$, tale cioè che risulti $f^* |_A = f$;

b) X è tale che per ogni spazio Z nel quale X sia immerso come sottospazio chiuso esiste un intorno aperto V di X in Z del quale X sia un retratto, esiste cioè un morfismo $r : V \to X$ tale che $r|_X = \mathrm{id}_X$.

Uno spazio che soddisfi ad *a*) (oppure a *b*)) è detto ANR.

Indichiamo ora con $\tilde{a}$), rispettivamente $\tilde{b}$), le proposizioni *a*), *b*) formulate nella categoria G–$\mathfrak{M}$. Un G–spazio X che soddisfi ad $\tilde{a}$) è detto G–ANR [2].

Dimostriamo la seguente

1.1. PROPOSIZIONE. *Per* G *gruppo finito, nella categoria* G–$\mathfrak{M}$ *le proprietà* $\tilde{a}$), $\tilde{b}$) *sono equivalenti.*

Mostriamo che $\tilde{a}) \Rightarrow \tilde{b})$. Sia quindi X un G–spazio soddisfacente ad $\tilde{a}$). Detto Z un G–spazio del quale X sia un sotto–G–spazio chiuso, consideriamo la coppia (Z , X) e l'applicazione identica $i : X \to X$. Per ipotesi esiste un G–spazio E intorno aperto di X in Z per il quale è definita un'estensione equivariante di $i, i^* : E \to X$. i^* fornisce evidentemente la retrazione equivariante cercata.

Si noti che la finitezza di G non è fin qui intervenuta. Per mostrare invece che $\tilde{b}) \Rightarrow \tilde{a})$ supporremo che il gruppo G abbia ordine n. Indichiamo i suoi elementi con $g_1, g_2, \cdots, g_n$. Detto H il cubo fondamentale di Hilbert cioè $H = \mathop{\mathbf{X}}\limits_{k=1}^{\infty} I_k \, (I_k = [0, 1])$, consideriamo lo spazio $H^n = \mathop{\mathbf{X}}\limits_{i=1}^{n} H_i \, (H_i = H)$. Esso risulta ovviamente omeomorfo ad H. Diamo ad H^n struttura di G–spazio definendo l'azione di G su H^n al modo seguente [3]:

$$g_k (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}) \quad x_k \in H_k$$

dove

$$g_l = g_{i_l} g_k^{-1}.$$

Si ha allora il seguente

1.2. LEMMA. *Se* G *è gruppo finito d'ordine* n, *ogni* G–*spazio* X *può essere immerso come sotto*–G–*spazio in* H^n.

È noto [4] che ogni spazio metrico separabile può essere immerso in H; sia $\eta : X \to H$ una tale immersione. Indichiamo con $\hat{\eta} : X \to H^n$ la seguente applicazione

$$\hat{\eta}(x) = (\eta(g_1 x), \eta(g_2 x), \cdots, \eta(g_n x)) \quad x \in X.$$

(2) Cfr. [6], p. 25. In tale lavoro si introduce la nozione di G–ANR relativamente a G–spazi normali.

(3) Questa idea mi è stata suggerita da N. Teleman.

(4) Cfr. per esempio [4], p. 119.

Essa è ancora un'immersione poiché tale è η. È inoltre un'applicazione equivariante: si ha infatti

$$g_k \hat{\eta}(x) = (\eta(g_{i_1} x), \eta(g_{i_2} x), \cdots, \eta(g_{i_n} x)) =$$

essendo $g_{i_l} = g_l g_k$

$$= (\eta(g_1 g_k x), \eta(g_2 g_k x), \cdots, \eta(g_n g_k x)) = \hat{\eta}(g_k x).$$

$\hat{\eta}$ fornisce quindi un'immersione di X come G-spazio in H^n.

Dimostriamo ora che $\tilde{\tilde{b}}) \Rightarrow \tilde{a})$ (5).

Sia allora X un G-spazio soddisfacente a $\tilde{\tilde{b}})$ e (Y, A) una coppia di G-spazi con A chiuso in Y. Assegnata un'applicazione equivariante $f: A \to X$ consideriamo l'applicazione (equivariante) $j = \hat{\eta} f: A \to H^n$. Essa per il Teorema di Tietze (6) ammette un'estensione $j^*: Y \to H^n$. Tale applicazione può non essere equivariante. Consideriamo allora l'applicazione $\hat{j}: Y \to H^n$ così definita

$$\hat{j}(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{g_k^{-1} j^*(g_k y)}{n} \qquad y \in Y$$

dove la somma è quella relativa alla struttura lineare presente in H^n. $\hat{j}$ è ancora un'estensione di j ed è inoltre equivariante. Consideriamo ora $H^n \times [0, 1]$ con la naturale struttura di G-spazio fornitagli da H^n:

$$g(l, t) = (gl, t) \quad g \in G \quad l \in H^n \quad t \in [0, 1].$$

Indichiamo con $h: Y \to \hat{\eta}(X) \times \{0\} \cup H^n \times (0, 1]$ l'applicazione equivariante definita da

$$h(y) = (\hat{j}(y), \min(1, d(y, A))) \qquad y \in Y$$

avendo indicato con d la distanza in Y. Poiché $\hat{\eta}(X) \times \{0\} \cong \hat{\eta}(X) \cong X$ è G–spazio chiuso in $\hat{\eta}(X) \times \{0\} \cup H^n \times (0, 1]$ per l'ipotesi $\tilde{\tilde{b}})$ esiste un sotto–G–spazio aperto V di $\hat{\eta}(X) \times \{0\} \cup H^n \times (0, 1]$ intorno di $\hat{\eta}(X) \times \{0\}$ che si retrae equivariatemente su questo. Indichiamo con $r: V \to \hat{\eta}(X) \times \{0\}$ la retrazione. Posto $E = h^{-1}(V)$ G–spazio intorno aperto di A in Y l'applicazione equivariante $f^*: E \to X$ definita dalla composizione

$$E \xrightarrow{h} V \xrightarrow{r} \hat{\eta}(X) \times \{0\} \xrightarrow{\pi_1} \hat{\eta}(X) \xrightarrow{\hat{\eta}^{-1}} X$$

fornisce l'estensione cercata di f. Segue dunque che $\tilde{\tilde{b}}) \Rightarrow \tilde{a})$.

(5) Useremo una tecnica analoga a quella adoperata per la categoria $\mathfrak{M}$ da R. H. Fox in [1], pp. 272–73.

(6) Cfr. per esempio [4], pp. 117–18.

§ 2. Spazi di applicazioni

Siano X e C G–spazi. Detto X^C lo spazio delle applicazioni continue di C in X (dotato della topologia compatto–aperta), indichiamo con X_G^C il sottospazio delle applicazioni continue equivarianti. Stabiliamo la seguente

2.1. Proposizione. *Se* X *è* G–ANR *e* C *è* G–*spazio compatto, allora* X_G^C *è* ANR.

Detta (Y, A) una coppia di spazi con A chiuso in Y, sia assegnata una applicazione $h : A \to X_G^C$. Com'è noto [7] ad essa viene associata un'applicazione $\tilde{h} : A \times C \to X$ così definita

$$\tilde{h}(a, c) = [h(a)](c) \quad a \in A \quad c \in C.$$

Definendo in $A \times C$ una struttura di G–spazio al modo seguente

$$g(a, c) = (a, gc) \quad a \in A \quad c \in C \quad g \in G.$$

$\tilde{h}$ risulta equivariante: si ha infatti

$$\tilde{h}[g(a, c)] = \tilde{h}(a, gc) = [h(a)](gc) = g\{[h(a)](c)\} = g\tilde{h}(a, c).$$

La corrispondenza che si viene così a determinare tra $(X_G^C)^A$ e $X_G^{A\times C}$ è evidentemente biunivoca. Poiché X è G–ANR, in base alla proprietà $\tilde{a}$) si può estendere $\tilde{h}$ ad un'applicazione equivariante $\tilde{h}^* : U \to X$ dove U è un sotto–G–spazio aperto di $Y \times C$ contenente $A \times C$. Poiché C è compatto esiste un aperto E in Y tale che risulti $A \times C \subset E \times C \subset U \subset Y \times C$; consideriamo quindi l'applicazione equivariante $\tilde{h}^*|_{E\times C} : E \times C \to X$, che per semplicità continueremo ad indicare con $\tilde{h}^*$. L'applicazione associata ad $\tilde{h}^*$, $h^* : E \to X_G^C$ risulta quindi un'estensione di h, donde la tesi.

Ricordando il risultato di J. Milnor [8] secondo cui ogni ANR è omotopicamente equivalente a un CW–complesso numerabile, dalla proposizione 2.1 segue immediatamente la

2.2. Proposizione. *Se* X *è* G–ANR *e* C *è* G–*spazio compatto allora* X_G^C *è omotopicamente equivalente a un* CW–*complesso numerabile.*

Osserviamo che nelle Proposizioni 2.1, 2.2 non interviene l'ipotesi che G sia finito.

Supponiamo ora che X sia G–spazio e C spazio compatto (ma non necessariamente G-spazio). Diamo a X^C spazio delle applicazioni di C in X struttura di G–spazio al modo seguente

$$(gf)(c) = g[f(c)] \qquad f \in X^C \quad c \in C \quad g \in G.$$

(7) Cfr. per esempio [3], p. 282.
(8) Cfr. [5], p. 272.

Si ha al riguardo la seguente

2.3. PROPOSIZIONE. *Se* G *è un gruppo finito,* X *è* G–ANR *e* C *spazio compatto, allora* X^C *è* G–ANR.

Alla dimostrazione della proposizione premettiamo il seguente

2.4. LEMMA. *Sia* G *gruppo finito,* Y G–*spazio e* A *sotto*–G–*spazio chiuso di* Y. *Se* U *è sotto*-G–*spazio aperto di* $Y \times I$ *contenente* $A \times I$, *esiste un sotto*–G–*spazio aperto* V *di* Y *contenente* A *tale che risulti*

$$A \times I \subset V \times I \subset U \subset Y \times I.$$

Una proprietà analoga è nota nella categoria $\mathfrak{M}$ (9): esiste quindi V′ aperto (ma non necessariamente sotto–G–spazio) di Y contenente A tale che risulti

$$A \times I \subset V' \times I \subset U \subset Y \times I.$$

Si consideri allora $V = \bigcap_{g \in G} gV'$. Esso in quanto sotto G–spazio aperto di Y verificante le inclusioni

$$A \subset V \subset V' \subset Y$$

soddisfa alla tesi.

Passiamo quindi a dimostrare la proposizione 2.3. Detta (Y , A) una coppia di G–spazi con A chiuso in Y sia $h : A \to X^C$ un'applicazione equivariante. Ad essa viene associata un'applicazione $\tilde{h} : A \times C \to X$ definita al solito dalla legge

$$\tilde{h}(a , c) = [h(a)](c) \quad a \in A \qquad c \in C.$$

Se si dà ad $A \times C$ struttura di G–spazio ponendo

$$g(a , c) = (ga , c) \quad g \in G \quad a \in A \quad c \in C$$

dall'equivarianza di h segue l'equivarianza di $\tilde{h}$ (e viceversa): infatti

$$\tilde{h}[g(a , c)] = \tilde{h}(ga , c) = [h(ga)](c) = [gh(a)](c) = g[h(a)(c)] = g\tilde{h}(a , c).$$

La corrispondenza che si determina così tra $(X^C)^A_G$ e $X^{A \times C}_G$ è biunivoca.

Poiché X è G–ANR per la proprietà $\tilde{a}$), e per il lemma 2.4 $\tilde{h}$ si può estendere ad un'applicazione equivariante $\tilde{h}^* : E \times C \to X$ dove E è sotto–G–spazio aperto di Y contenente A. L'applicazione equivariante $h^* : E \to X^C$ associata ad $\tilde{h}^*$ risulta un'estensione di h donde la tesi.

§ 3. TEOREMA D'ESTENSIONE DI G–OMOTOPIE

Assegnati due G–spazi Y, X, si dice che due applicazioni equivarianti $f , g \in X^Y$ sono G–omotope se sono omotope e se l'applicazione che realizza l'omotopia $F : Y \times I \to K$ è equivariante, cioè se

$$F(gy , t) = gF(y , t) \quad y \in Y \quad t \in I \quad g \in G.$$

(9) Cfr. per esempio [2], p. 86.

Com'è noto [10] per spazi ANR vale il Teorema di estensione di omotopie. Mostriamo che per gli spazi G–ANR sussiste un'analoga proprietà.

3.1. PROPOSIZIONE. *Sia* G *gruppo finito e* X G–ANR. *Assegnata una coppia di* G–*spazi* (Y, A) *con* A *chiuso in* Y *siano* $f, g \in X_G^A$ *due applicazioni* G–*omotope. Sia inoltre* $f^* \in X_G^Y$ *un'estensione di* f. *esiste allora un'estensione di* g, $g^* \in X_G^Y$ *che risulta* G–*omotopa a* f^* [11].

Sia $F : A \times I \to X$ l'applicazione equivariante che realizza la G–omotopia tra f e g ($F|_{A\times\{0\}} = f$, $F|_{A\times\{1\}} = g$). Utilizzando per la categoria G–$\mathfrak{M}$ ragionamenti analoghi a quelli adoperati da W. Hurewicz e H. Wallman in [2] per la categoria $\mathfrak{M}$ e poggiandosi sul Lemma 2.4 si deduce l'esistenza di un'estensione equivariante di F, $F' : Y \times \{0\} \cup V \times I \to X$ dove V è un opportuno sotto–G–spazio aperto di Y contenente A. Detta d la distanza in Y, si consideri allora l'applicazione $p : Y \to \mathbf{R}$ definita al modo seguente

$$p(y) = d(y, Y - V)/d(y, Y - V) + d(y, A) \qquad y \in Y$$

Poiché può supporsi G–invariante la metrica in Y [12] si ha

$$p(gy) = p(y) \quad y \in Y, g \in G.$$

Indichiamo con $F^* : Y \times I \to X$ l'applicazione così definita

$$F^*(y, t) = F'(y, tp(y));$$

essa risulta equivariante: si ha infatti

$$F^*(gy, t) = F'(gy, tp(gy)) = F'(gy, tp(y)) = gF'(y, tp(y)) = gF^*(y, t).$$

Posto allora $g^* = F^*|_{Y\times\{1\}}$, F^* fornisce evidentemente una G–omotopia tra f^* e l'applicazione g^*, estensione di g.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. H. FOX (1942) – *A characterization of absolute neigborhood retracts*, « Bull. Am. Math. Soc. », *48*, 271–75.
[2] W. HUREWICZ e H. WALLMAN (1948) – *Dimension Theory*, Princenton Univ. Press.
[3] C. KURATOWSKI (1935) – *Sur les espaces localement connexes et peaniens en dimension n*, « Fund. Math. », *24*, 269–87.
[4] C. KURATOWSKI (1952) – *Topologie* I, « Polska Akademia Nauk », *20*.
[5] J. MILNOR (1959) – *On spaces having the homotopy type of a* CW–*complex*, « Trans. Am. Math. Soc. », *90*, 272–80.
[6] R. PALAIS (1960) – *The classification of* G–*spaces*, «Mem. of Am. Math. Soc. ».

(10) Cfr. per esempio [2], p. 86.

(11) La tecnica dimostrativa è analoga a quella adoperata per la categoria $\mathfrak{M}$ in [2], p. 86.

(12) Cfr. [6], p. 4.