Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Massimo Lorenzani, Antonio Maschietti

Su di un Teorema di confronto

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.5, p. 718–722.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_5_718_0>

Geometria algebrica. — *Su di un Teorema di confronto* (*). Nota di

MASSIMO LORENZANI e ANTONIO MASCHIETTI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper an extension to schemes of Siu's comparison theorem is given, whence an extension of a theorem by Hartshorne is derived.

Scopo di questa Nota è di dimostrare il seguente:

TEOREMA I. *Sia* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un* **C** (1)*-schema separato localmente di tipo finito,* Y *un chiuso di* X *ed* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Modulo coerente. Se i fasci di coomologia locale* $\mathcal{H}^i_Y(\mathcal{F})$ *e* $\mathcal{H}^i_{Y^h}(\mathcal{F}^h)$ (2) *sono coerenti per* $i \leq n$, *con* n *intero fissato, allora gli omomorfismi canonici*

$$\mathcal{H}^i_Y(\mathcal{F})^h \to \mathcal{H}^i_{Y^h}(\mathcal{F}^h)$$

sono isomorfismi per ogni $i \leq n$.

Questo Teorema è un'estensione al caso degli schemi del Teorema B di Siu ([7]) (3) e lo si ottiene utilizzando metodi algebrici, tenendo presente l'idea della dimostrazione del succitato Teorema B. Una conseguenza immediata del Teorema I è la generalizzazione di un Teorema di Hartshorne ([5], Teor. 2.1, p. 222).

PROPOSIZIONE 1. *Sia* M *un* A*-modulo di tipo finito, con* A *anello noetheriano ed* N *un sottomodulo di* M. *Se* B *è un anello noetheriano piatto su* A, *per ogni* $t \in M$ *si ha*:

$$(N : t)_A \otimes_A B \cong (N \otimes_A B : (t) \otimes_A B)_B .$$

Dimostrazione. Indicata con $\bar{t}$ la classe di t mod N, si ha la seguente successione esatta:

$$0 \longrightarrow (N : t)_A \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_A(\bar{t}A, \bar{t}A)$$

ove α è l'omomorfismo associato alla moltiplicazione per $a \in A$. Poiché B è piatto su A, la successione

$$0 \longrightarrow (N : t)_A \otimes_A B \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha \otimes 1} \mathrm{Hom}_A(\bar{t}A, \bar{t}A) \otimes_A B$$

è ancora esatta; ed essendo $\mathrm{Hom}_A(\bar{t}A, \bar{t}A) \otimes_A B \cong \mathrm{Hom}_B((\bar{t}) \otimes_A B, (\bar{t}) \otimes_A B)$ (cfr. [1], Cap. I, Prop. 11), risulta $\mathrm{Ker}\ \alpha \otimes 1 = (N \otimes_A B : (t) \otimes_A B)_B$, q.e.d.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1975.

(1) **C** denota il campo dei numeri complessi.

(2) « h » denota il funtore spazio analitico associato.

(3) I numeri tra [ ] rimandano alla Bibliografia posta alla fine del lavoro.

DEFINIZIONE 1. Sia M un A-modulo di tipo finito, con A anello noetheriano, I un ideale di A ed N un sottomodulo di M. Indicheremo con $N(Y)_M$, ove Y denota il chiuso di Spec (A) definito da I, il seguente sottomodulo di M:

$$N(Y)_M = \{ t \in M / \rho_x(t) \in N_x \text{ per ogni } x \in \operatorname{Spec}(A) \,/\, x \not\supseteq I \},$$

ove ρ_x è il morfismo $M \to M_x = M \otimes_A A_x$.

DEFINIZIONE 2. Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno schema localmente noetheriano, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Modulo coerente, $\mathcal{G}$ un sotto $\mathcal{O}_X$-Modulo coerente di $\mathcal{F}$, Y un chiuso di X ed $\mathcal{I}$ il fascio di ideali che definisce Y, indicheremo con $\mathcal{G}(Y)_{\mathcal{F}}$ il sottofascio coerente di $\mathcal{F}$ ottenuto per incollamento sul ricoprimento di aperti affini noetheriani di X dei fasci associati ai sottomoduli di cui alla Def. 1.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* M *un* A*-modulo di tipo finito, con* A *anello noetheriano,* N *un sottomodulo di* M, I *un ideale di* A ; *posto* $Y = \mathcal{V}(I)$, *esiste un intero* k *tale che risulti* $N(Y)_M \cong (N : I^k)_M$.

Dimostrazione. Poiché M è un A-modulo noetheriano, la catena di sottomoduli

$$(N : I)_M \subseteq (N : I^2)_M \subseteq \cdots \subseteq (N : I^n)_M \subseteq \cdots$$

è stazionaria; pertanto, esiste un intero $k \geq 1$ tale che $(N : I^n)_M \cong (N : I^k)_M$ per ogni $n \geq k$. Considerato un elemento $s \in (N : I^k)_M$ si ha che $sI^k \subseteq N$; e, se $x \in X = \operatorname{Spec}(A)$ non contiene I, risulta $I^k \otimes_A A_x \cong A_x$. Inoltre, poiché A_x è piatto su A, abbiamo:

$$(N : I^k)_M \otimes_A A_x \cong (N \otimes_A A_x : I^k \otimes_A A_x)_{M_x} \cong (N_x : A_x)_{M_x} \cong N_x ;$$

ovvero $\rho_x(s) \in N_x$ e quindi $s \in N(Y)_M$.

Viceversa, se $t \in N(Y)_M$, $\rho_x(t) \in N_x$ per ogni $x \not\supseteq I$. Considerato l'ideale $J = (N : t)_A$, in virtù della Prop. 1, l'insieme $E(J, A) = \{ x \in X = \operatorname{Spec}(A) \,/\, J_x \neq A_x \}$ è contenuto in Y, quindi $\mathcal{V}(J) \subseteq \mathcal{V}(I)$. Ne segue che $I \subseteq \operatorname{rad}(J)$, ovvero $I^n \subseteq J$ per qualche intero n; pertanto $tI^n \subseteq tJ \subseteq N$ e $t \in (N : I^k)_M$.

COROLLARIO. *Sia* $(X, \mathcal{O}_X)$ *uno schema localmente noetheriano,* Y *un chiuso di* X, $\mathcal{I}$ *il fascio di ideali che lo definisce,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$ – *Modulo coerente e* $\mathcal{G}$ *un sotto* $\mathcal{O}_X$ – *Modulo coerente di* $\mathcal{F}$; *allora risulta*:

$$\mathcal{G}(Y)_{\mathcal{F}} = \bigcup_n (\mathcal{G} : \mathcal{I}^n)_{\mathcal{F}}.$$

Siamo ora in grado di procedere alla dimostrazione del Teor. I; al riguardo sussiste intanto la

PROPOSIZIONE 3. *Nelle ipotesi del Teorema I, l'omomorfismo canonico* $\mathcal{H}^0_Y(\mathcal{F})^h \to \mathcal{H}^0_{Y^h}(\mathcal{F}^h)$ *è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Posto $\mathscr{G} = 0$, dalla Def. 1 risulta che $\mathscr{H}^0_Y(\mathscr{F}) = O(Y)_{\mathscr{F}}$ e $\mathscr{H}^0_{Y^h}(\mathscr{F}^h) = O(Y^h)_{\mathscr{F}^h}$. In virtù del corollario precedente si ha che $O(Y)_{\mathscr{F}} = \bigcup_n (O : \mathscr{I}^n)_{\mathscr{F}}$, dove $\mathscr{I}$ è il fascio di ideali che definisce Y, e $O(Y^h)_{\mathscr{F}^h} = \bigcup_n (O : (\mathscr{I}^h)^n)_{\mathscr{F}^h}$. Indicata con φ l'applicazione $X^h \to X$, l'anello locale $\mathcal{O}_{X,\varphi(x)}$ risulta essere fedelmente piatto su $\mathcal{O}_{X^h,x}$ (cfr. [2], Exp. XII), onde l'asserto segue dalla Prop. 5 di [7].

Si osservi che i due fasci di coomologia locale $\mathscr{H}^0_Y(\mathscr{F})$ e $\mathscr{H}^0_{Y^h}(\mathscr{F}^h)$ sono sempre coerenti: si veda anche [2] Exp. VIII, Cor. 2.3 per il caso algebrico; [8], Prop. 1.9 per quello analitico.

Dimostrazione del Teor. I. Procedendo per induzione rispetto ad i, ed osservato che il caso $i = 0$ segue dalla Prop. 3, supporremo vero il Teorema per $1 \le i \le n - 1$. Indicato con $\mathscr{K}$ il fascio $O(Y)_{\mathscr{F}}$ e con j il morfismo d'inclusione $X - Y \to X$, poiché $\operatorname{Supp}(\mathscr{K}) \subseteq Y$, risulta $\mathscr{R}^i j_*(\mathscr{K} / Y - Y) = 0$ per ogni $i \ge 0$. Inoltre, essendo $\mathscr{H}^1_Y(\mathscr{K}) = \operatorname{Coker}(\mathscr{K} \to j_*(\mathscr{K} / X - Y))$ e $\mathscr{H}^{i+1}_Y(\mathscr{K}) = \mathscr{R}^i j_*(\mathscr{K} / X - Y)$ per ogni $i \ge 1$, segue che tutti i fasci di coomologia locale $\mathscr{H}^j_Y(\mathscr{K})$ sono nulli (cfr. [3], Exp. I, Cor. 2.11). Dalla successione esatta di fasci

$$0 \to \mathscr{K} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F} / \mathscr{K} \to 0$$

si ottiene la successione esatta dei fasci di coomologia locale

$$\to \mathscr{H}^i_Y(\mathscr{K}) \to \mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F}) \to \mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F} / \mathscr{K}) \to \mathscr{H}^{i+1}_Y(\mathscr{K}) \to$$

ed essendo $\mathscr{H}^i_Y(\mathscr{K}) = \mathscr{H}^{i+1}_Y(\mathscr{K}) = 0$, si ha che $\mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F}) = \mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F} / \mathscr{K})$ per ogni $i \ge 1$. In modo analogo si deduce che $\mathscr{H}^i_{Y^h}(\mathscr{F}^h) = \mathscr{H}^i_{Y^h}(\mathscr{F}^h / \mathscr{K}^h)$. Pertanto, a meno di scambiare il fascio $\mathscr{F}$ con il fascio $\mathscr{F} / \mathscr{K}$ possiamo supporre che sia $\mathscr{K} = 0$.

Poiché la questione da trattare è di natura locale, possiamo limitarci al caso in cui X sia uno schema affine, cioè $X = \operatorname{Spec}(A)$ con A **C**-algebra di tipo finito, $\mathscr{F} = \tilde{M}$ con M A-modulo di tipo finito, $Y = \mathscr{V}(I)$ con I ideale di A. Dato che $O(Y)_{\mathscr{F}} = \mathscr{H}^0_Y(\mathscr{F}) = 0$, in virtù del Teor. 3.8 di [4], risulta $\operatorname{prof}_Y \mathscr{F} \ge 1$; pertanto, esiste un elemento $f \in I$ che non è divisore dello zero per $\mathscr{F}$. Indicato con φ il morfismo $\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ definito dalla moltiplicazione per f, si ha che $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ su X. Inoltre, se Q è un aperto arbitrario di X^h relativamente compatto, per l'ipotesi di coerenza dei fasci $\mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F})$ e $\mathscr{H}^i_{Y^h}(\mathscr{F}^h)$ e per il fatto che f si annulla sui loro supporti, esiste in intero m positivo tale the

$$f^m \mathscr{H}^i_Y(\mathscr{F}) = 0 \text{ su } X \text{ e } f^m \mathscr{H}^i_{Y^h}(\mathscr{F}^h) = 0 \text{ su } Q.$$

Sia ψ il morfismo ottenuto applicando m volte φ e $\mathscr{G} = \operatorname{Coker} \psi$. L'ipotesi di coerenza per i fasci di coomologia locale assicura che i fasci $\mathscr{H}^i_Y(\mathscr{G})$, $\mathscr{H}^i_{Y^h}(\mathscr{G}^h)$ sono coerenti per ogni $i \le n - 1$; pertanto, dalla successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\psi} \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0$$

si ottiene il seguente diagramma commutativo le cui righe sono esatte:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathscr{H}_{\mathrm{Y}}^{i-1}(\mathscr{F})^h \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathscr{H}_{\mathrm{Y}}^{i-1}(\mathscr{F})^h \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathscr{H}_{\mathrm{Y}}^{i}(\mathscr{F})^h \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathscr{H}_{\mathrm{Y}}^{i}(\mathscr{F})^h \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & \mathscr{H}_{\mathrm{Y}h}^{i-1}(\mathscr{F}^h) \arrow[r] & \mathscr{H}_{\mathrm{Y}h}^{i-1}(\mathscr{G}^h) \arrow[r] & \mathscr{H}_{\mathrm{Y}h}^{i}(\mathscr{F}^h) \arrow[r, "\psi 2"] & \mathscr{H}_{\mathrm{Y}h}^{i}(\mathscr{F}^h) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Per ipotesi induttiva α e β sono isomorfismi, ed inoltre $\mathrm{Im}\,\psi_1 = 0$ su X^h, mentre $\mathrm{Im}\,\psi_2 = 0$ su Q, ne segue che γ è un isomorfismo su Q. Data l'arbitrarietà dell'aperto Q, γ risulta essere un isomorfismo su tutto X^h, e ciò completa la dimostrazione del Teorema.

Sia X un **C**-schema separato localmente di tipo finito, Y un chiuso di X avente dimensione s, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$–Modulo coerente. Posto $k = \inf_{x \in \mathrm{X}-\mathrm{Y}} \operatorname{prof} \mathscr{F}_x$ i fasci di coomologia locale $\mathscr{H}_{\mathrm{Y}}^{i}(\mathscr{F})$ risultano coerenti per ogni $i \leq k$ (cfr. [2], Exp. VIII, Cor. 2.3). D'altro canto, posto $k' = \inf_{x \in \mathrm{X}^h - \mathrm{Y}^h} \operatorname{prof} \mathscr{F}_x^h$ si ha che $k' \geq k$, ed inoltre i fasci di coomologia locale $\mathscr{H}_{\mathrm{Y}h}^{i}(\mathscr{F}^h)$ sono coerenti per ogni $i < k'-s$ (cfr. [9], Cor. 2.3); pertanto, sia i fasci $\mathscr{H}_{\mathrm{Y}}^{i}(\mathscr{F})$ che i fasci $\mathscr{H}_{\mathrm{Y}h}^{i}(\mathscr{F}^h)$ risultano certamente coerenti per ogni $i < k - s$. Quanto sopra consente di formulare il seguente

TEOREMA II. *Sia* X *un* **C**-*schema separato proprio*, Y *un chiuso di* X *avente dimensione* s. *Posto* $\mathrm{U} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$ *si ha*:

1) *i morfismi canonici*

$$\alpha_i : \mathrm{H}^i(\mathrm{U}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^i(\mathrm{U}^h, \mathscr{F}^h)$$

sono isomorfismi per ogni $i < k - s - 1$ *e per ogni fascio coerente* $\mathscr{F}$ *su* U; *inoltre, questi gruppi sono di dimensione finita.*

2) *Se* $k - s \geq 2$, *il funtore* $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^h$ *è pienamente fedele sulla categoria dei fasci coerenti su* U.

3) *Se* $k - s \geq 3$, *il funtore* $\mathscr{F} \to \mathscr{F}^h$ *induce un'equivalenza di categorie tra i fasci algebrici coerenti su* U *e quelli analitici coerenti su* U^h.

Dimostrazione. Segue dal Teor. 2.1 di [5], tenuto conto del Teor. I e del Cor. 4.3 di [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI (1967) – *Algèbre Commutative*, Hermann, Paris.

[2] A. GROTHENDIECK (1971) – *Seminaire de Géométrie Algébrique*, « Lecture Notes in Mathematics », *224*, Springer–Verlag.

[3] A. GROTHENDIECK (1968) – *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, North–Halland Publ. Co.

[4] A. GROTHENDIECK (1966) – *Local Cohomology*, « Lecture Notes in Mathematics », *41*, Springer–Verlag.

[5] R. HARTSHORNE (1970) – *Ample Subvarieties of algebraic varieties*, «Lecture Notes in Mathematics », *156*, Springer–Verlag.

[6] Y. T. SIU (1969) – *Noether–Lasker decomposition of coherent analytic subsheaves*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *135*.

[7] Y. T. SIU (1970) – *Analytic sheaves of local cohomology*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *148*.

[8] Y. T. SIU and G. TRAUTMANN, *Gap-sheaves and Extension of Coherent Analytic Subsheaves*, « Lecture Notes in Mathematics », *172*, Springer–Verlag.

[9] G. TRAUTMANN (1969) – *Ein Endlichkeitssatz in der analytischen Geometrie*, « Invent. Math. », *8*.