Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Umberto Bartocci, Giorgio Faina

Sul tipo di Lenz-Barlotti di certe estensioni di un piano grafico infinito

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.5, p. 703–707.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_5_703_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

Geometria. — *Sul tipo di Lenz–Barlotti di certe estensioni di un piano grafico infinito.* Nota di UMBERTO BARTOCCI e GIORGIO FAINA (*), presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper the Lenz–Barlotti type of "ultrapowers" of an infinite graphic plane is established.

«Questo lavoro è dedicato, con profonda ammirazione, al prof. Beniamino Segre».

Detto π un piano grafico infinito (cfr. [7][1]), si sono costruite in [1] alcune speciali *estensioni proprie* $\pi \xrightarrow{i} \pi^*$ di π, denominate *ultrapotenze* di π (ci si riferirà costantemente anche nel seguito alla terminologia ed alle notazioni di [1]). In questa Nota gli Autori dimostrano il seguente

TEOREMA I. – *Il tipo di Lenz-Barlotti* [2] *di* π^* *coincide con quello di* π.

Osservazione. – Come immediata conseguenza di questo Teorema, si ottiene che, come già annunciato in [1], l'estensione $\pi \to \pi^*$ è diversa da un'*estensione libera*, in quanto quest'ultima riesce invece sempre di tipo I.1.

Notiamo inoltre che, dai risultati conseguiti in [1] e dal Teorema precedente, si trae subito il seguente

TEOREMA II. – *Ogni piano grafico infinito* π *ammette estensioni proprie* $\pi \to \pi^*$, *di potenza via via crescente, tali che il tipo di Lenz-Barlotti di tali estensioni coincida con quello di* π.

1. – ALCUNI LEMMI PREPARATORI

Indichiamo con A ed $\mathscr{F}$ rispettivamente l'insieme (infinito) e l'ultrafiltro non principale su A tali che

$$\pi^* = \pi^A / \mathscr{F} \text{ (cfr. [2] o [6] oltre a [1]).}$$

Detta l una retta di π, indicheremo poi con $\widehat{i(l)}$ l'unica retta di π^* che contiene $i(l)$.

(*) Dell'Istituto Matematico dell'Università degli Studi di Perugia.
(**) Nella seduta del 10 maggio 1975.
(1) I numeri tra [ ] rimandano alla bibliografia posta in fine al lavoro.
(2) Per quanto ha riguardo a questa nozione ed alla relativa terminologia ci riferiremo a [4] (ovvero all'esposizione che dell'argomento è stata fatta in [5]).

Sussiste allora il seguente

LEMMA 1. – *Se* π *è* (P, l)*-transitivo, allora* π^* *è* $(i(P), \bar{i}(\breve{l}))$*-transitivo.*

La relativa dimostrazione trovasi in [1].

Se f è un qualsiasi elemento di π^A, denotiamo con $\bar{f}$ la sua classe di equivalenza in π^*. Dati quindi quattro punti $\bar{o}, \bar{e}, \bar{u}, \bar{v}$ in π^* a tre a tre non allineati, è chiaro che esiste un elemento $B \in \mathcal{F}$ tale che, per ogni $\beta \in B$, i punti $o(\beta)$, $e(\beta)$, $u(\beta)$, $v(\beta)$ di π formano anch'essi un quadrangolo. Denotato ora con $K^*(\bar{o}, \bar{e}, \bar{u}, \bar{v})$ l'anello ternario associato al quadrangolo $(\bar{o}, \bar{e}, \bar{u}, \bar{v})$ in π^*, e con $K(o(\beta), e(\beta), u(\beta), v(\beta))$ quello associato al quadrangolo $(o(\beta), e(\beta), u(\beta), v(\beta))$ in π – per ogni elemento $\beta \in B$ – dimostreremo che sussiste il

LEMMA 2. – *L'ultraprodotto* $\prod_{\beta \in B} K(o(\beta), e(\beta), u(\beta), v(\beta)) / (\mathcal{F} \mid B)$ (3) *possiede una struttura naturale di anello ternario (indotta da quella di ogni singolo fattore) ed è in corrispondenza di isomorfismo naturale con l'anello ternario* $K^*(\bar{o}, \bar{e}, \bar{u}, \bar{v})$.

Dimostrazione. – Basta invero osservare che l'insieme sostegno di $K^*(\bar{o}, \bar{e}, \bar{u}, \bar{v})$ è la retta $\bar{o}\bar{e}$, e che quindi esiste una corrispondenza biunivoca naturale φ tra l'insieme dei punti di $\bar{o}\bar{e}$ e l'insieme $\prod_{\beta \in B} o(\beta)\, e(\beta)/(\mathcal{F} \mid B)$, il quale ultimo non è altro che l'insieme sostegno dell' ultraprodotto $\prod_{\beta \in B} K(o(\beta), e(\beta), u(\beta), v(\beta))/(\mathcal{F} \mid B)$. Il completamento della dimostrazione, e cioè il fatto che quell'ultraprodotto possegga una struttura naturale di anello ternario, e che φ risulti un isomorfismo tra i due anelli ternari così ottenuti, non presenta alcuna difficoltà.

È infine opportuno, corrispondentemente alle possibili *specificazioni algebriche* di $K^*(\bar{o}, \bar{e}, \bar{u}, \bar{v})$ (cfr. ad esempio l'Appendice di [7]), fornire un ulteriore Lemma concernente le relazioni tra la struttura algebrica di un ultraprodotto e quella dei suoi fattori.

LEMMA 3. – *Forme restando le notazioni precedenti, sia* $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *una famiglia di anelli ternari. Allora l'ultraprodotto* $\prod_{\alpha \in A} K_\alpha / \mathcal{F}$ *è:*

(i) *un sistema cartesiano, se esiste* $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{F}$ *tale che* K_α *sia un sistema cartesiano per qualsiasi* $\alpha \in B$;

(ii) *un sistema lineare con moltiplicazione associativa, se esiste* $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{F}$ *tale che* K_α *sia un sistema lineare con moltiplicazione associativa per ogni* $\alpha \in B$;

(iii) *un corpo, se esiste* $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{F}$ *tale che* K_α *sia un corpo qualunque sia* $\alpha \in B$;

e viceversa.

(3) Con il simbolo $\mathcal{F}/B$ si è denotato, come d'uso, la *restrizione* di $\mathcal{F}$ a B, cioè l'ultrafiltro (non principale) di B definito dalla famiglia $X \cap B$ al variare di X in $\mathcal{F}$.

La dimostrazione diretta di tale Lemma risulta agevole. È inoltre chiaro che detto Lemma si può ricondurre ad un Teorema più generale (pertinente però alla Logica Matematica nell'ambito della teoria degli ultraprodotti di strutture), per il quale cfr. ad esempio [3], § 11.

Attraverso i Lemmi 2 e 3 e la caratterizzazione di una coppia (P, l)–transitiva di π mediante la specificazione algebrica di un opportuno anello ternario (cfr. [4] o [5]), si perviene allo studio delle coppie $(\bar{f}, \bar{g}\bar{h})$–transitive di π^* $(\bar{f}, \bar{g}, \bar{h} \in \pi^*, \bar{g} \neq \bar{h})$ invertendo quindi il Lemma 1 col seguente

LEMMA 4. – *Se π^* è $(\bar{u}, \bar{u}\bar{v})$-transitivo $(\bar{u}, \bar{v} \in \pi^*, \bar{u} \neq \bar{v})$, allora esiste un* $B \in \mathscr{F}$ *tale che π è $(u(\beta), u(\beta)\, v(\beta))$-transitivo per ogni* $\beta \in B$.

Inoltre, se π^* è $(\bar{u}, \bar{o}\bar{v})$-transitivo $(\bar{u}, \bar{o}, \bar{v} \in \pi^*$ non allineati), allora esiste in $\mathscr{F}$ un B tale che π è $(u(\beta), o(\beta)\, v(\beta))$-transitivo per ogni $\beta \in B$.

Dimostrazione. – Invero se è ad esempio π^* $(\bar{v}, \bar{u}\bar{v})$–transitivo per certi punti $\bar{u}, \bar{v} \in \pi^*$ $(\bar{u} \neq \bar{v})$, si scelgano $\bar{o}, \bar{e} \in \pi^*$ tali che la quaterna $(\bar{o}, \bar{e}, \bar{u}, \bar{v})$ risulti un quadrangolo in π^*. Risulta allora $K^*(\bar{o}, \bar{e}, \bar{u}, \bar{v})$ un sistema cartesiano, ed in virtù del Lemma 2 è $K^*(\bar{o}, \bar{e}, \bar{u}, \bar{v}) \simeq \prod_{\beta \in B} K(o(\beta), e(\beta), u(\beta), v(\beta))/(\mathscr{F} \mid B)$, per un certo elemento $B \in \mathscr{F}$. Di conseguenza, in virtù del Lemma 3, è $K(o(\beta), e(\beta), u(\beta), v(\beta))$ un sistema cartesiano per qualsiasi $\beta \in B_1 \subseteq B$, per un certo $B_1 \in \mathscr{F}$. Quindi π risulta $(v(\beta), u(\beta)\, v(\beta))$–transitivo per tutti i $\beta \in B_1$ (si ricordi esplicitamente che $B_1 \neq \varnothing$), c.v.d..

Se invece π^* è $(\bar{u}, \bar{o}\bar{v})$–transitivo per certi punti $\bar{o}, \bar{u}, \bar{v} \in \pi^*$, formanti un triangolo non degenere in π^*, si scelga $\bar{e} \in \pi^*$ in modo tale che $(\bar{o}, \bar{e}, \bar{u}, \bar{v})$ risulti un quadrangolo in π^*. Allora, ragionando come prima, si ha che $K^*(\bar{o}, \bar{e}, \bar{u}, \bar{v})$ è un anello ternario lineare con moltiplicazione associativa, di guisa che tale risulta essere ogni anello ternario $K(o(\beta), e(\beta), u(\beta), v(\beta))$ per ogni $\beta \in B_1 \in \mathscr{F}$ – per un certo B_1 di $\mathscr{F}$ –, in virtù dei Lemmi 2 e 3. Quindi π è $(u(\beta), o(\beta)\, v(\beta))$–transitivo per qualunque $\beta \in B_1$, c.v.d..

2. – CONCLUSIONE

Veniamo ora alla dimostrazione del Teorema I. Ricordiamo anzitutto che le possibili configurazioni di Lenz–Barlotti del piano π sono complessivamente in numero di 14 (4), indicate, in ordine «crescente», con i simboli I.1, I.2, I.3, I.4, I.6, II.1, II.2, III.1, III.2, IVa.1, IVa.2, V.1, VII.1, VII.2.

Detta T la configurazione di Lenz–Barlotti del piano π e T^* quella del piano π^* (cfr. [4] e [5]), noi proveremo addirittura che T^* si deduce in modo *naturale* da $i(T)$. Cioè, detto (P, l) un qualsiasi elemento di T, proveremo che T^* si deduce dall'insieme $i(T) = \{(i(P), \widetilde{i(l)})\}$ *aggiungendo* ad esso

(4) E ricordiamo che è noto che esiste qualche piano (infinito) π per ciascuno dei tipi indicati, escluso il tipo I.6.

tutti gli eventuali centri e tutti gli eventuali assi che sono necessari per ottenere una possibile configurazione di Lenz–Barlotti dello stesso tipo della T nel piano π^*.

Cominciamo ad occuparci dei vari casi, iniziando dai più semplici.

Nel caso I.1 risulta $T = \varnothing$, e si tratta di provare che è anche $T^* = \varnothing$. Invero, se fosse ad esempio π^* $(\bar{v}, \bar{u}\bar{v})$–transitivo per certi punti $\bar{u}, \bar{v} \in \pi^*$ $(\bar{u} \neq \bar{v})$, in virtù del Lemma 4 π risulterebbe $(v(\beta), u(\beta) v(\beta))$ – transitivo per ogni $\beta \in B \in \mathscr{F}$, contrariamente all'ipotesi che $T = \varnothing$. Se invece π^* fosse $(\bar{u}, \bar{o}\bar{v})$–transitivo per certi punti $\bar{o}, \bar{u}, \bar{v} \in \pi^*$ formanti un triangolo (non degenere) in π^*, in virtù del Lemma 4 π risulterebbe $(u(\beta), o(\beta) v(\beta))$–transitivo per qualunque $\beta \in B \in \mathscr{F}$, d'onde ancora un assurdo.

Nel caso 1.2, indichiamo con (P, l), $P \notin l$ l'unico elemento di T e proviamo che $T^* = \{(i\,P), \widehat{i(l)})\}$.

È chiaro che $T^* \ni (i(P), \widehat{i(l)})$, in virtù del Lemma 1. Di più, se fosse $T^* \ni (\bar{v}, \bar{u}\bar{v})$ per certi punti $\bar{u}, \bar{v} \in \pi^*$, $\bar{u} \neq \bar{v}$, risulterebbe, ragionando come sopra, che π è $(v(\beta), u(\beta) v(\beta))$–transitivo per ogni $\beta \in B_1 \in \mathscr{F}$, per un certo B_1 di $\mathscr{F}$. Perciò $v(\beta) = P$, $u(\beta) v(\beta) = l$ per tutti i $\beta \in B_1$, d'onde la conclusione, vale a dire che $\bar{v} = i(P)$ e $\bar{u}\bar{v} = \widehat{i(l)}$. Analogamente si ragionerebbe nel caso assurdo che fosse $T^* \ni (\bar{u}, \bar{o}\bar{v})$ (con $\bar{o}, \bar{u}, \bar{v}$ non allineati in π^*), poiché si dedurrebbero coppie $(u(\beta), o(\beta) v(\beta))$–transitive in π per ogni $\beta \in B_1 \in \mathscr{F}$ con $u(\beta) \notin o(\beta) v(\beta)$.

Del tutto similmente si discutono i casi I.3, I.4, II.1, II.2.

Per il caso VII.1 bisogna provare che π^* è $(\bar{v}, \bar{u}\bar{v})$–transitivo per qualsiasi coppia di punti $\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \neq \bar{v}$, e che non esistono coppie $(\bar{u}, \bar{o}\bar{v})$ con $\bar{o}, \bar{u}, \bar{v}$ non allineati in π^* tali che π^* è $(\bar{u}, \bar{o}\bar{v})$–transitivo. La prima affermazione è conseguenza immediata dei Lemmi 2 e 3, del fatto che esiste un $B \in \mathscr{F}$ tale che $u(\beta) \neq v(\beta)$ qualunque sia $\beta \in B$ e che π è stato supposto $(v(\beta), u(\beta) v(\beta))$–transitivo. La seconda affermazione è una conseguenza immediata del Lemma 4.

Il caso VII.2 è assai semplice in quanto, se esiste in π un quadrangolo (P, Q, R, S) tale che $K(P, Q, R, S)$ sia un corpo, allora certamente $K^*(i(P), i(Q), i(R), i(S))$ è un corpo in virtù dei Lemmi 2 e 3.

Esaminiamo ora il caso I.6. In quest'ipotesi T è costituito da tutte le coppie $(x, \sigma(x))$, ove x è un punto di π appartenente ad una retta L fissata, diverso però da un punto fissato $p \in L$, e σ è una corrispondenza biunivoca tra i punti di $L - p$ e il fascio delle rette di centro il punto p esclusa soltanto la retta L. È allora chiaro, in virtù del Lemma 1, che T^* contiene tutte le coppie del tipo $(i(x), \widehat{i(\sigma(x))})$ ove $i(x) \in \widehat{i(L)}$, $\widehat{i(\sigma(x))} \ni i(p)$ ed $i(x) \neq i(p)$. Vogliamo provare che π^* è di tipo I.6 con riferimento ad $\widehat{i(L)}$ ed $\widehat{i(p)}$.

Invero, ove π^* non fosse di tipo I.6, poiché π^* ammette infinite coppie $(\bar{u}, \bar{o}\bar{v})$ rispetto alle quali esso è $(\bar{u}, \bar{o}\bar{v})$-transitivo (con $\bar{o}, \bar{u}, \bar{v} \in \pi^*$ non allineati), ne conseguirebbe che π^* dovrebbe essere necessariamente di tipo VII.2, vale a dire desarguesiano, il che però non è possibile in quanto allora π stesso riuscirebbe desarguesiano, contro l'ipotesi.

Per quanto concerne il caso III.1, la configurazione T per il piano π è composta da tutte le coppie (x , px) ove x è un punto di π appartenente ad una retta fissata L e p è un punto fissato di π non appartenente ad L. Noi proveremo che T^* è composta di tutte le coppie $(\bar{v} , \widetilde{i(p)\bar{v}})$ ove $\bar{v} \in \widetilde{i(L)}$ (ed ovviamente $o(p) \notin \widetilde{i(L)}$). Invero, che T^* contenga tutte queste coppie risulta ovvio usando come di consueto i Lemmi 2 e 3. Bisogna per di più dimostrare che π^* non può essere né $(\bar{v} , \bar{u}\bar{v})$-transitivo per qualche retta $\bar{u}\bar{v} \neq i(p)\bar{v}$, né $(\bar{u} , \bar{o}\bar{v})$-transitivo per qualche terna di punti $\bar{o} , \bar{u} , \bar{v} \in \pi^*$ non allineati. E questo è di nuovo una conseguenza del Lemma 4.

I casi rimanenti III.2, IVa.1, IVa.2, V.1 possono venir trattati con metodi analoghi a quelli precedentemente indicati, con che si conclude la dimostrazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] U. BARTOCCI (1969) – *Un procedimento di estensione dei piani grafici infiniti*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », *46* (8) 358–366.

[2] N. BOURBAKI (1961) – *Topologie générale*, Chap. I, 3 ediz..

[3] W. W. COMFORT e S. NEGREPONTIS (1974) – *The theory of ultrafilters*, «Die Grundl. d. Math.», *Bd. 211*, Springer, Berlin.

[4] P. DEMBOWSKI (1968) – *Finite geometries*, « Ergebn. d. Math. », *Bd. 44*, Springer, Berlin.

[5] D. GHINELLI (1969) – *Classificazione di Lenz–Barlotti e problemi aperti inerenti ad essa*, Seminari « Geometria, Algebra e Questioni connesse » dell'Istituto Matematico « G. Castelnuovo », Roma.

[6] S. KOCHEN (1961) – *Ultraproducts in the theory of models*, « Ann. of Math. », *74* (2), 221–261.

[7] B. SEGRE (1961) – *Lectures on modern geometry* (*with an appendix of L. Lombardo Radice*), Cremonese, Roma.