Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sorin Gogonea

Sur la détermination des fonctions analytiques à singularités données par certaines conditions aux limites mixtes et conditions de raccordement

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.5, p. 680–685.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_5_680_0>

Analisi matematica. — *Sur la détermination des fonctions analytiques à singularités données par certaines conditions aux limites mixtes et conditions de raccordement.* Nota di SORIN GOGONEA, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — Siano D_1 e D_2 i dominii $y > 0$ e $y < 0$ del piano complesso $z = x + iy$ e $L_s (s = 1, 2, \cdots, p)$, $T_m (m = 1, 2, \cdots, q)$, $p + q$ segmenti sull'asse reale senza punti comuni. Si determinano due funzioni analitiche $f_j(z) = \varphi_j + i\psi_j$ definite in D_j $(j = 1, 2)$, le quali hanno singolarità isolate, con le seguenti condizioni: sono dati i valori delle φ_j e ψ_j sugli orli corrispondenti di tagli disposti rispettivamente lungo L_s e T_m, mentre sulla parte restante dell'asse reale i valori di φ_j e ψ_j verificano le condizioni di raccordo (3) e (4).

1. Soient dans le plan complexe $z = x + iy$ les domaines $D_1 : y > 0$ et $D_2 : y < 0$ et considérons sur l'axe réel L les segments disjoints $L_s : \overline{A_s B_s}$ $(s = 1, 2, \cdots, p)$ et $T_m : \overline{C_m D_m}$ $(m = 1, 2, \cdots, q)$, dont la position relative est quelconque. Les abscisses des extrémités de $\overline{A_s B_s}$ et $\overline{C_m D_m}$ seront notées par a_s, b_s respectivement c_m, d_m et supposons $a_1 < b_1 < \cdots < a_p < b_p$, $c_1 < d_1 < \cdots < c_q < d_q$. Soit E l'ensemble des extrémités des segments $\overline{A_s B_s}$, leurs abscisses considérées dans un ordre arbitraire étant notées par $e_n (n = 1, 2, \cdots, 2p)$. Soit également E′ l'ensemble des extrémités des segments $\overline{C_m D_m}$ et $e'_l (l = 1, 2, \cdots, 2q)$ les abscisses correspondantes considérées dans un ordre arbitraire et posons $\mathscr{E} = E \cup E'$. Désignons par L_s^+ et L_s^- le côté supérieur (vers $y > 0$) respectivement inférieur de la coupure pratiquée sur L_s. D'une façon analogue soient T_m^+ et T_m^- les deux côtés de la coupure pratiquée sur T_m et posons $L^+ = \bigcup_{s=1}^{p} L_s^+$, $L^- = \bigcup_{s=1}^{p} L_s^-$, $T^+ = \bigcup_{m=1}^{q} T_m^+$, $T^- = \bigcup_{m=1}^{q} T_m^-$. Enfin si L^* représent la réunion des segments L_s et T_m posons $L_0 = L \setminus L^*$.

Soient ensuite $F_1(z)$ et $F_2(z)$ deux fonctions uniformes définies dans tout le plan, à l'exception de l'ensemble S_1 respectivement S_2 de leurs singularités isolées. On suppose que $S_j \subset D_j$ de la sorte que $F_j(z)$ est holomorphe en $D_r (r \neq j)$.

Dans cette Note nous nous proposons de résoudre le problème suivant: déterminer les fonctions analytiques $f_j(z)$ définies en $D_j \setminus S_j$ $(j = 1, 2)$, continûment prolongéable sur $L \setminus \mathscr{E}$ telles que:

a) La différence

$$\mathscr{F}_j(z) = f_j(z) - F_j(z) \tag{1}$$

est holomorphe en D_j.

(*) Nella seduta del 12 aprile 1975.

b) Au voisinage des points de $\mathscr{E}$ on ait

(2) $$|f_j(z)| < \frac{C^{te}}{|z-\tilde{e}_\rho|^\alpha}, \qquad \alpha \in (0\,,1)$$

où $\tilde{e}_\rho$ est l'un des points e_n ou e_l'.

c) Les valeurs limites $f_j(\zeta)$ de $f_j(z)$ verifient les conditions

(3) $$\operatorname{Re}\{k_2 f_1(\zeta) - k_1 f_2(\zeta)\} = 0\,, \qquad \zeta \in L_0$$

(4) $$\operatorname{Im}\{f_1(\zeta) - f_2(\zeta)\} = 0 \qquad , \qquad \zeta \in L_0$$

(5) $$\operatorname{Re}\{f_1(\zeta)\} = m_1(\zeta)\,, \quad \zeta \in L^+ \quad ; \quad \operatorname{Re}\{f_2(\zeta)\} = m_2(\zeta)\,, \quad \zeta \in L^-$$

(6) $$\operatorname{Im}\{f_1(\zeta)\} = n_1(\zeta)\,, \quad \zeta \in T^+ \quad ; \quad \operatorname{Im}\{f_2(\zeta)\} = n_2(\zeta)\,, \quad \zeta \in T^-$$

où $m_1(\zeta)$ et $m_2(\zeta)$ respectivement $n_1(\zeta)$ et $n_2(\zeta)$ sont des fonctions höldériennes données sur L_s respectivement T_m et k_1 et k_2 des constantes réelles données de la sorte que $k_1 + k_2 \neq 0$.

Si $k_1 = k_2$ ce problème coïncide avec le problème mixte que nous avons considéré auparavant [1]. Sous la forme énoncée le problème est susceptible des importantes applications dans la théorie de la filtration.

2. Introduisons les fonctions

(7) $$G_1(z) = \overline{F_2(\bar{z})} \quad ; \quad g_1(z) = \overline{f_2(\bar{z})}\,.$$

$G_1(z)$ est définie dans tout le plan à l'exception de l'ensemble S_1^* de ses singularités, où $S_1^* \subset D_1$ est l'ensemble des points symétriques à S_2 par rapport à l'axe réel, tandis que $g_1(z)$ est définie en $D_1 \setminus S_1^*$ et telle que $g_1(z) - G_1(z)$ est holomorphe en D_1. On a pour chaque $\zeta \in L \setminus \mathscr{E}$

(8) $$g_1(\zeta) = \overline{f_2(\zeta)}\,,$$

ou

(8′) $$\operatorname{Re}\{g_1(\zeta)\} = \operatorname{Re}\{f_2(\zeta)\} \quad ; \quad \operatorname{Im}\{g_1(\zeta)\} = -\operatorname{Im}\{f_2(\zeta)\}.$$

Il s'ensuit que les conditions (3) et (4) devienent

(9) $$\operatorname{Re}\{k_2 f_1(\zeta) - k_1 g_1(\zeta)\} = 0 \quad ; \quad \operatorname{Im}\{f_1(\zeta) + g_1(\zeta)\} = 0\,.$$

Alors comme dans [2], introduisons les fonctions $H(z)$ et $K(z)$ définies en $D_1 \setminus (S_1 \cup S_1^*)$ par les relations

(10) $$H(z) = k_2 f_1(z) - k_1 g_1(z) \quad ; \quad K(z) = f_1(z) + g_1(z)$$

3. Compte tenu de (2), (7), (8′), (9), (5) et (6) il résulte aisément que si l'on pose

(11) $$H_0(z) = k_2 F_1(z) - k_1 G_1(z)$$

alors la différence $H(z) - H_0(z)$ est holomorphe en D_1 et

$$
(12)\qquad
\begin{gathered}
\operatorname{Re}\{H(\zeta)\} = \begin{cases} 0 , & \zeta \in L_0 \\ k_2 m_1(\zeta) - k_1 m_2(\zeta) , & \zeta \in \bigcup_{s=1}^{p} L_s \end{cases} \\
\operatorname{Im}\{H(\zeta)\} = k_2 n_1(\zeta) + k_1 n_2(\zeta) , \qquad \zeta \in \bigcup_{m=1}^{q} T_m .
\end{gathered}
$$

En conséquence $H(z)$ est la solution d'un problème mixte de Volterra à singularités données pour le demi-plan supérieur [3]. La solution de ce problème s'obtient de la façon suivante. Soit

$$
(13)\qquad Z(z) = \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{r} (z - e'_j)}{\prod_{j=r+1}^{2q} (z - e'_j)}} ,
$$

où le radical est considéré holomorphe dans le plan muni des coupures sur T_m et tel que, $Z(z)$ est réelle et positive pour $x = z > \max\{e'_1, e'_2, \cdots, e'_{2q}\}$. Donc $iZ(z)$ est la solution du problème homogène sans singularitées qui est bornée au voisinage des points $e'_1, e'_2, \cdots, e'_r$, donnée à l'avance.

Soit ensuite $N(z)$ la somme des parties principales de la fonctions $-iH_0(z)/Z(z)$ relativament à toutes ses singularités. Alors on a

$$
(14)\qquad H(z) = iZ(z)\left\{ N(z) + \overline{N(\bar z)} + P_{q-r}(z) + \frac{1}{\pi}\int_{L+} \frac{k_2 m_1(\zeta) - k_1 m_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} + \right.
$$
$$
\left. + \frac{i}{\pi}\int_{T+} \frac{k_2 n_1(\zeta) + k_1 n_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} \right\} ,
$$

où $P_{q-r}(z)$ est un polynome arbitraire à coefficients réels de degré $q - r$ si $q - r \geq 0$ et qui se réduit à une constant C_0, réelle, si $q - r < 0$.

Si $q - r \geq 0$, la fonction $H(z)$ défine par (14) satisfait à toutes les conditions imposées. Par contre, si $q - r < 0$, $H(z)$ posséde un pôle supplémentaire d'ordre $r - q$ à l'infini. En effet si l'on pose

$$
(15)\qquad \frac{-iH_0(z)}{Z(z)} = N(z) + \tilde{N}(z) ,
$$

$\tilde{N}(z)$ étant donc holomorphe, on obtient de (7), (11), (14) et (15) sans difficulté que

$$
H(z) - H_0(z) = k_1 F_2(z) - k_2 \overline{F_1(\bar z)} + iZ(z)\left\{ -\tilde{N}(z) - \overline{\tilde{N}(\bar z)} + C_0 + \right.
$$
$$
\left. + \frac{1}{\pi}\int_{L+} \frac{k_2 m_1(\zeta) - k_1 m_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} + \frac{i}{\pi}\int_{T+} \frac{k_2 n_1(\zeta) + k_1 n_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} \right\} .
$$

$F_2(z)$ et $\overline{F_1(\bar{z})}$ sont holomorphes en D_1, mais compte tenu de (13) $Z(z)$ a un pôle d'ordre $r-q$ à l'infini et donc $K(z)-K_0(z)$ possède également ce pôle. Afin qu'il disparaisse il faut et il suffit que la parenthèse qui multiplie $Z(z)$ ait à l'infini un zéro de multiplicité $r-q$. Supposons qu'au voisinage de $z=\infty$ on a le developpement

$$N(z)+N(\bar{z})+\frac{i}{Z(z)}\{k_2[F_1(z)-\overline{F_1(\bar{z})}]+k_1[F_2(z)-\overline{F_2(\bar{z})}]\}+C_0=\sum_{j=0}^{\infty}\nu_j z^{-j}.$$

Alors la solution (14) posséde les singularités voulues si et seulement si

$$\nu_0 = 0 \tag{16}$$

$$\nu_s+\frac{1}{\pi}\int_{L+}\frac{k_2 m_1(\zeta)-k_1 m_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)}\zeta^{s-1}\,d\zeta+ \tag{16'}$$

$$+\frac{i}{\pi}\int_{T+}\frac{k_2 n_1(\zeta)+k_1 n_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)}\zeta^{s-1}\,d\zeta=0 \qquad s=1,2,\cdots,r-q-1$$

et dans ces elle est unique. La condition $\nu_0=0$ peut être remplie en prenant $C_0=0$.

4. D'une façon analogue si l'on pose

$$K_0(z)=F_1(z)+G_1(z) \tag{17}$$

alors la différence $K(z)-K_0(z)$ este holomorphe en D_1 et l'on a

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\{K(\zeta)\}=m_1(\zeta)+m_2(\zeta)\,, && \zeta\in\bigcup_{s=1}^{p}L_s\\
&\operatorname{Im}\{K(\zeta)\}=\begin{cases}0\,, & \zeta\in L_0\\ n_1(\zeta)-n_2(\zeta)\,, & \zeta\in\bigcup_{m=1}^{q}T_m\,.\end{cases}
\end{aligned} \tag{18}$$

On aboutit de la sorte de nouveau au problème de Volterra à singularités données pour le demi-plan supérieur. La solution $X(z)$ du problème homogène sans singularités qui este bornée au voisinage des points $e_1, e_2,\cdots,e_t$ donnés à l'avance est de la forme

$$X(z)=\sqrt{\frac{\prod_{s=1}^{t}(z-e_j)}{\prod_{s=t+1}^{2q}(z-e_j)}}\,, \tag{19}$$

en choisissant la détermination du radical qui est holomorphe dans le plan muni des coupures sur L_s et qui prend des valeurs réelles et positives pour $z=x>\max\{e_1,e_2,\cdots,e_{2p}\}$. Alors si $M(z)$ est la somme des parties principales de la fonction $K_0(z)/X(z)$ relativement à toutes ses singularités on a

$$\text{(20)}\qquad K(z) = X(z)\Big\{M(z) + \overline{M(\bar z)} + Q_{p-t}(z) + \frac{i}{\pi}\int_{L+}\frac{m_1(\zeta)+m_2(\zeta)}{X^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{z-\zeta} + \frac{1}{\pi}\int_{T+}\frac{n_2(\zeta)-n_1(\zeta)}{X^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{z-\zeta}\Big\}$$

où $Q_{p-t}(z)$ est un polynôme arbitraire à coefficients réels de degré $p-t$ si $p-t\geq 0$, et qui se réduit à une constante réelle C_0^* si $p-t<0$.

Si $p-t\geq 0$, $K(z)$ satisfait à toutes les conditions. Si $p-t<0$, en posant

$$\text{(21)}\qquad \frac{K_0(z)}{X(z)} = M(z) + \tilde{M}(z)\,,$$

on obtient comme dans les cas précédent

$$K(z) - K_0(z) = F_2(z) + \overline{F_1(\bar z)} + X(z)\Big\{-\tilde{M}(z) - \overline{\tilde{M}(\bar z)} + C_0^* + \frac{i}{\pi}\int_{L+}\frac{m_1(\zeta)+m_2(\zeta)}{X^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{z-\zeta} + \frac{1}{\pi}\int_{T+}\frac{n_2(\zeta)-n_1(\zeta)}{X^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{z-\zeta}\Big\}.$$

Il s'ensuit que la différence $K(z)-K_0(z)$ possède encore un pôle d'ordre $t-p$ à l'infini du à $X(z)$. Soit qu'au voisinage de $z=\infty$ on a le developpement

$$\text{(22)}\qquad M(z) + \overline{M(\bar z)} + C_0^* - \frac{1}{X(z)}\left[F_1(z) + F_2(z) + \overline{F_1(\bar z)} + \overline{F_2(\bar z)}\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\mu_j z^{-j}.$$

Alors $K(z)$ donnée par (20) possède seulement les singularités voulues si et seulement si

$$\text{(23)}\qquad \mu_0 = 0$$

$$\text{(23')}\qquad \mu_s + \frac{i}{\pi}\int_{L+}\frac{m_1(\zeta)+m_2(\zeta)}{X^+(\zeta)}\zeta^{s-1}\,d\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{T+}\frac{n_2(\zeta)-n_1(\zeta)}{X^+(\zeta)}\zeta^{s-1}\,d\zeta = 0\,,\qquad s=1,2,\cdots,t-p-1.$$

Ces conditions, dont la première peut être remplie en prenant $C_0^*=0$, assurent l'unicité de la solution.

5. Une fois $H(z)$ et $K(z)$ obtenues, $f_1(z)$ et $g_1(z)$ résultent de (10) sous la forme

$$f_1(z) = \frac{1}{k_1+k_2}\left[H(z) + k_1 K(z)\right]\quad;\quad g_1(z) = \frac{1}{k_1+k_2}\left[k_2 K(z) - H(z)\right].$$

En utilisant ensuite la deuxième relation (7) on déduit l'expression de $f_2(z)$.

Tout calcul fait en obtient la solution du problème posé sous la forme

$$f_1(z) = \frac{1}{k_1 + k_2} \Big\{ k_1 X(x) \Big[M(z) + \overline{M(\bar z)} + Q_{p-t}(z) +$$

$$+ \frac{i}{\pi} \int_{L+} \frac{m_1(\zeta) + m_2(\zeta)}{X^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{T+} \frac{n_2(\zeta) - n_1(\zeta)}{X^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} \Big] +$$

$$+ iZ(z) \Big[N(z) + \overline{N(\bar z)} + P_{q-r}(z) + \frac{1}{\pi} \int_{L+} \frac{k_2 m_1(\zeta) - k_1 m_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} +$$

$$+ \frac{i}{\pi} \int_{T+} \frac{k_2 n_1(\zeta) + k_1 n_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} \Big] \Big\}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{k_1 + k_2} \Big\{ k_2 X(z) \Big[M(z) + \overline{M(\bar z)} + Q_{p-t}(z) +$$

$$+ \frac{i}{\pi} \int_{L+} \frac{m_1(\zeta) + m_2(\zeta)}{X^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{T+} \frac{n_2(\zeta) - n_1(\zeta)}{X^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} \Big] +$$

$$+ iZ(z) \Big[N(z) + \overline{N(\bar z)} + P_{q-r}(z) + \frac{1}{\pi} \int_{L+} \frac{k_2 m_1(\zeta) - k_1 m_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} +$$

$$+ \frac{i}{\pi} \int_{T+} \frac{k_2 m_1(\zeta) + k_1 n_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} \Big] \Big\},$$

$P_{q-r}(z)$ et $Q_{p-t}(z)$ ayant la signification précisée au nn. 3 et 4.

Cette solution est bornée au voisinage des points $e_1, e_2, \cdots, e_s, e'_1, e'_2, \cdots, e'_r$ et dans le cas $q - r \geq 0$, et $p - t \geq 0$ elle contient $p + q - r - t + 2$ constantes arbitraires réellés. Si $q - r < 0$, ou $p - t < 0$, (24), où l'on doit prendre $P_{p-r}(z) = 0$, ou $Q_{p-t}(z) = 0$, représente la solution bornée au voisinage des mêmes points si et seulement si les conditions (16′) ou (23′) sont satisfaites. L'accomplissement de ces conditions assure en même temps l'unicité de la solution.

On peut assément vérifier que si $k_1 = k_2$, alors $f_1(z) = f_2(z)$ et l'expression commune de ces functions coïncide avec la solution du problème mixte consideré en [1] correspondant aux singularités données par $F_1(z) + F_2(z)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. GOGONEA (1970) – «Comptes Rendus Acad. Sci. Paris», *270*, 1015–1018.
[2] S. GOGONEA (1973) – «Rendiconti dei Lincei», *55* (1–2), 13–17.
[3] S. GOGONEA (1969) – «Comptes Rendus Acad. Sci. Paris», *268*, 210–213.