Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlo Ravaglia

Teoremi di confronto e di separazione per equazioni differenziali alle derivate parziali in uno spazio di Hilbert

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.5, p. 675–679.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_5_675_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1975.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 maggio 1975

Presiede il Presidente della Classe BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Teoremi di confronto e di separazione per equazioni differenziali alle derivate parziali in uno spazio di Hilbert.* Nota di CARLO RAVAGLIA presentata (*) del Corrisp. G. CIMMINO.

SUMMARY. — The classical Sturm comparison and separation theorems have been generalized by M. Picone and by G. Cimmino to partial differential equations and to systems of ordinary and partial differential equations [1].

In [2] G. Cimmino has proved the Sturm theorems for mappings valued in l^2

Recently several authors [3, 4, 5, 6, 7] have studied the Sturm theorems for ordinary and partial equations with solutions taking their values in R or R^n. C. Pontini [8] has proved a Sturm theorem for ordinary equations whose solutions take their values in a Banach algebra. In my work I prove Sturm comparison and separation theorems for linear homogenous self-adjoint partial differential equations of the second order whose solutions take their values in a Hilbert space. I suppose that a non-trivial solution of a differential equation taking its values in a Hilbert space vanishes on the boundary of a smooth domain $D \subset R^n$ and I prove that a solution of another related differential equation with solutions taking their values in $\mathscr{L}(H)$ has not an inverse in at least a point of D. Fundamental theorems are (2) and (3) from which we obtain the identity (4) which is the basis for Sturm theorems.

Sia H uno spazio di Hilbert su campo complesso. Indicheremo con $(h \mid k)$ il prodotto interno in H, con $\mathscr{L}(H)$ ($\mathscr{L}(H^n)$) l'algebra delle trasformazioni lineari e continue di H (H^n) in sè, con $\mathscr{L}(H, H^n)$ lo spazio di Banach delle trasformazioni lineari e continue di H in H^n; se $u \in \mathscr{L}(H)$ indicheremo con u^* l'aggiunta di u, se $h \in H^n$ ($v \in \mathscr{L}(H)^n$) con h^i (v^i) le componenti di h (v).

H^n è uno spazio di Hilbert con prodotto interno $(h \mid k) = \sum_{i=1}^{n} (h^i \mid K^i)$. L'algebra $\mathscr{L}(H^n)$ è identificata con l'algebra $\mathscr{L}(H)^{\{1,2,\cdots,n\}\times\{1,2,\cdots,n\}}$ così che l'elemento $a \in \mathscr{L}(H^n)$ è identificato con la matrice di trasformazioni lineari e

(*) Nelle seduta del 10 maggio 1975.

continue $(a_{ij})_{i,j}$ tale che $(a(h))^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h^j$; se $a \in \mathscr{L}(\mathrm{H}^n)$, a risulta autoaggiunto se e solo se $a_{ij}^* = a_{ji}$,

Se $u \in \mathscr{L}(\mathrm{H})$ $(\mathscr{L}(\mathrm{H}^n))$ e $h \in \mathrm{H}(\mathrm{H}^n)$ indicheremo $u(h)$ con uh; se $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{H})$ $(u \in \mathscr{L}(\mathrm{H}, \mathrm{H}^n), v \in \mathscr{L}(\mathrm{H}^n))$ indicheremo $v \circ u$ con vu.

Sia A un insieme aperto di $\mathbf{R}^n$.

Se $f \in \mathscr{C}^{(1)}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$ $(\mathscr{C}^{(1)}_{\mathscr{L}(\mathrm{H})}(\mathrm{A}))$, poniamo: $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$. Lo spazio di Banach $\mathscr{L}(\mathrm{H})^n$ è identificato con lo spazio di Banach $\mathscr{L}(\mathrm{H}, \mathrm{H}^n)$, così che se $f \in \mathscr{C}^{(1)}_{\mathscr{L}(\mathrm{H})}(\mathrm{A})$ allora $\operatorname{grad} f \in \mathscr{C}_{\mathscr{L}(\mathrm{H})^n}(\mathrm{A}) = \mathscr{C}_{\mathscr{L}(\mathrm{H},\mathrm{H}^n)}(\mathrm{A})$. Se $g \in \mathscr{C}^{(1)}_{\mathrm{H}^n}(\mathrm{A})$ $(\mathscr{C}^{(1)}_{\mathscr{L}(\mathrm{H},\mathrm{H}^n)}(\mathrm{A}))$, poniamo: $\operatorname{div} g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g^i}{\partial x^i}$.

Sia D un dominio regolare contenuto in A con normale esterna $\vec{n}$.

Useremo la seguente integrazione per parti.

Siano $\mathrm{E}, \mathrm{F}_1, \cdots, \mathrm{F}_p, \mathrm{G}$ spazi di Banach su $\mathbf{R}$, $(h, k_1, \cdots, k_p) \to [h \cdot \mathrm{K}_i \cdot \cdots \cdot \mathrm{K}_p]$ una applicazione multilineare e continua di $\mathrm{E} \times \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p$ in G. Sia $f \in \mathscr{C}^{(1)}_{\mathrm{E}^n}(\mathrm{A})$, $g \in \mathscr{C}^{(1)}_{\mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p}(\mathrm{A})$, allora risulta:

$$\text{(1)} \qquad \int_{\mathrm{D}} [\operatorname{div} f \cdot g_1 \cdot \cdots \cdot g_p] \, dx = \int_{\partial \mathrm{D}} \sum_{i=1}^{n} [f^i \cdot g_1 \cdot \cdots \cdot g_p] \, n^i \, ds - \\ - \int_{\mathrm{D}} \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \left[f^i \cdot g_1 \cdot \cdots \frac{\partial g_j}{\partial \mathrm{X}^i} \cdot \cdots \cdot g_p \right] dx.$$

In particolare per $p = 1$, $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathrm{H}$, $\mathrm{G} = \mathbf{C}$, $[h \cdot k] = (h \mid k)$ si ha:

$$\text{(1,1)} \qquad \int_{\mathrm{D}} (\operatorname{div} f \mid g) \, dx = \int_{\partial \mathrm{D}} \sum_{i=1}^{n} (f^i \mid g) \, n^i \, ds - \int_{\mathrm{D}} (f \mid \operatorname{grad} g) \, dx.$$

Proviamo ora alcuni teoremi fondamentali.

(2) TEOREMA. *Sia*:

$$\text{(2,1)} \qquad a \in \mathscr{C}^{(1)}_{\mathscr{L}(\mathrm{H}^n)}(\mathrm{A}), \; p \in \mathscr{C}_{\mathscr{L}(\mathrm{H})}(\mathrm{A}), \; z \in \mathscr{C}^{(2)}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$$

$$\text{(2,2)} \qquad \operatorname{div}(a \operatorname{grad} z) + pz = 0$$

$$\text{(2,3)} \qquad z = 0 \quad su \quad \partial \mathrm{D}.$$

Allora risulta:

$$\text{(2,4)} \qquad \int_{\mathrm{D}} (a \operatorname{grad} z / \operatorname{grad} z) \, dx - \int_{\mathrm{D}} (pz \mid z) \, dx = 0.$$

Dimostrazione. Da (2,2) segue: $(\operatorname{div}(a \operatorname{grad} z) \mid z) + (pz \mid z) = 0$. Integrando su D, da (1,1) e da (2,3) segue immediatamente (2,4).

(3) TEOREMA. *Sia*:

$$\text{(3,1)} \qquad a \in \mathscr{C}^{(1)}_{\mathscr{L}(\mathrm{H}^n)}(\mathrm{A}), \; p \in \mathscr{C}_{\mathscr{L}(\mathrm{H})}(\mathrm{A}), \; y \in \mathscr{C}^{(2)}_{\mathscr{L}(\mathrm{H})}(\mathrm{A}), \; z \in \mathscr{C}^{(2)}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$$

$$\operatorname{div}\,(a \operatorname{grad}\, y) + py = 0 \tag{3,2}$$

$$z = 0 \quad su \quad \partial D \tag{3,3}$$

$$a \; e \; y^* \, a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x^j} \,, \quad per \;\; i\,,j = 1\,,2\,,\cdots n \;\; autoaggiunte. \tag{3,4}$$

Allora se y *è invertibile su* D, *risulta*:

$$\int_D (a \operatorname{grad} z \mid \operatorname{grad} z)\, dx - \int_D (pz \mid z)\, dx = \tag{3,5}$$

$$= \int_D (a\,(\operatorname{grad} z - (\operatorname{grad} y)\, y^{-1} z) \mid \operatorname{grad} z - (\operatorname{grad} y)\, y^{-1} z)\, dx.$$

Dimostrazione. Da (3.2) segue che su D si ha: $p = -\operatorname{div}\,(a \operatorname{grad}\, y)\, y^{-1}$. Quindi per (1) applicata alla applicazione multilineare di $\mathscr{L}$ (H) $\times$ $\mathscr{L}$ (H) $\times$ $\times$ H $\times$ H in $\mathbf{C}$ $(u\,,v\,,h\,,k) \to (uvh \mid k)$ e per (3,3) si ha:

$$-\int_D (pz \mid z)\, dx = \int_D ((\operatorname{div}\,(a \operatorname{grad}\, y))\, y^{-1} z \mid z)\, dx =$$

$$= \int_{\partial D} \sum_{i=1}^{n} ((a \operatorname{grad}\, y)^i\, y^{-1} \mid z)\, n^i\, ds -$$

$$-\int_D \left(\sum_{i=1}^{n} \left((a \operatorname{grad}\, y)^i \frac{\partial y^{-1}}{\partial x^i} z \mid z \right) + \left((a \operatorname{grad}\, y)^i\, y^{-1} \frac{\partial z}{\partial x^i} \,\middle|\, z \right) + \right.$$

$$\left. + \left((a \operatorname{grad}\, y)^i y^{-1} z \,\middle|\, \frac{\partial z}{\partial x^i} \right) \right) dx =$$

$$= \int_D \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x^j} y^{-1} \frac{\partial y}{\partial x^i}\, y^{-1} z \mid z \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x^j} y^{-1} \frac{\partial z}{\partial x^j} \,\middle|\, z \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} \left((a \operatorname{grad}\, y)^i\, y^{-1} z \,\middle|\, \frac{\partial z}{\partial x^i} \right) \right) dx\,.$$

Da (3,4) segue che su D si ha

$$a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x^j}\, y^{-1} = \left(\frac{\partial y}{\partial x^j}\, y^{-1} \right)^* a_{ji} \qquad (i\,,j = 1\,,2\,,\cdots n).$$

Si ha quindi su D:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x^j}\, y^{-1} \frac{\partial y}{\partial x^i}\, y^{-1} z \mid z \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x^j}\, y^{-1} \right)^* \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \frac{\partial y}{\partial x^i}\, y^{-1} \mid z \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left((a \operatorname{grad} y)^j\, y^{-1} z \,\middle|\, \frac{\partial y}{\partial x^j}\, y^{-1} z \right) = ((a \operatorname{grad} y)\, y^{-1} z \mid (\operatorname{grad} y)\, y^{-1} z)\,,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x^j}\, y^{-1} \frac{\partial z}{\partial x^i} \,\middle|\, z \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x^j}\, y^{-1} \right)^* \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \frac{\partial z}{\partial x^i} \,\middle|\, z \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left((a \operatorname{grad} z)^j \,\middle|\, \frac{\partial y}{\partial x^j}\, y^{-1} z \right) = (a \operatorname{grad} z \mid (\operatorname{grad} y)\, y^{-1} z)\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left((a \operatorname{grad} y)^i y^{-1} z \,\Big|\, \frac{\partial z}{\partial x^i}\right) = (a (\operatorname{grad} y) y^{-1} z \mid \operatorname{grad} z) .$$

Da ciò segue (3,5).

Da (2) e da (3) segue immediatamente il seguente teorema.

(4) TEOREMA. *Sia*:

(4,1) $\quad a , \bar{a} \in \mathscr{C}^{(1)}_{\mathscr{L}(\mathrm{H}^n)}(\mathrm{A}) \quad , \quad p , \bar{p} \in \mathscr{C}_{\mathscr{L}(\mathrm{H})}(\mathrm{A}) \quad , \quad y \in \mathscr{C}^{(2)}_{\mathscr{L}(\mathrm{H})}(\mathrm{A}) \quad , \quad z \in \mathscr{C}^{(2)}_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$

y e z soddisfino le condizioni (3,2), (3,3), (3,4) *e sia inoltre*

(4,2) $$\operatorname{div}(\bar{a} \operatorname{grad} z) + \bar{p} z = 0 .$$

Allora se y è invertibile su D *risulta*:

(4,3) $$\int_{\mathrm{D}} ((\bar{a} - a) \operatorname{grad} z \mid \operatorname{grad} z) \, \mathrm{d}x + \int_{\mathrm{D}} ((p - \bar{p}) z \mid z) \, \mathrm{d}x +$$
$$+ \int_{\mathrm{D}} (a (\operatorname{grad} z - (\operatorname{grad} y) y^{-1} z) \mid \operatorname{grad} z - (\operatorname{grad} y) y^{-1} z) \, \mathrm{d}x = 0 .$$

(5) TEOREMA. *Siano verificate le ipotesi di* (4) *e sia inoltre*

(5,1) $\quad \bar{a} , p , \bar{p}$ *autoaggiunte e* $\bar{a} - a \geq 0 \quad , \quad p - \bar{p} \geq 0 \quad , \quad a \geq 0 .$

Allora se y è invertibile su D *e se vale una delle seguenti condizioni*

(5,2) *per ogni* $x \in \mathrm{D}$ *si ha* $\operatorname{Ker} a(x) = \{0\}$

(5,3) *per ogni* $x \in \mathrm{D}$ *si ha* $\operatorname{Ker}(p(x) - \bar{p}(x)) = \{0\}$

(5,4) *per ogni* $x \in \mathrm{D}$ *si ha* $\operatorname{Ker}(\bar{a}(x) - a(x)) = \{0\}$

risulta $z = 0$ *su* D.

Dimostrazione. Se vale (5,2) risulta

$$\int_{\mathrm{D}} (a (\operatorname{grad} z - (\operatorname{grad} y) y^{-1} z) \mid \operatorname{grad} z - (\operatorname{grad} y) y^{-1} z) \, \mathrm{d}x = 0$$

quindi su D si ha $(a (\operatorname{grad} z - (\operatorname{grad} y) y^{-1} z) \mid \operatorname{grad} z - (\operatorname{grad} y) y^{-1} z) = 0$, quindi $\operatorname{grad} z - (\operatorname{grad} y) y^{-1} z = 0$ cioè per $i = 1, 2, \cdots, n$ $\dfrac{\partial z}{\partial x^i} - \dfrac{\partial y}{\partial x^i} y^{-1} z = 0$, quindi $y^{-1} \dfrac{\partial z}{\partial x^i} - y^{-1} \dfrac{\partial y}{\partial x^i} y^{-1} z = 0$, cioè $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(y^{-1} z) = 0$, quindi esiste $c \in \mathrm{H}$ tale che $y^{-1} z = c$; quindi $z = yc$.

Sia $x \in \partial\mathrm{D}$; si ha $y(x)\, c = 0$ e quindi, essendo $g(x)$ invertibile, $c = 0$, Quindi $z = 0$.

In modo analogo si prova che da (5,3) segue che $z = 0$.

Se vale (5,4) si prova come sopra che grad $z = 0$, quindi esiste $c \in H$ tale che $z = c$, poiché $z = 0$ su ∂D si ha $c = 0$.

Si ottiene così immediatamente il teorema del confronto.

(7) TEOREMA. *Siano verificate le ipotesi di* (5) *e inoltre valga una delle condizioni* (5,2), (5, 3), (5, 4). *Allora se* z *non è identicamente nulla su* D, *esiste* $x \in D$ *tale che* $y(x)$ *non è invertibile.*

Per $a = \bar{a}$ $p = \bar{p}$ si ottiene immediatamente da (5) il teorema di separazione.

(7) TEOREMA. *Siano verificate le condizioni* (3,1), (3,2), (3,3), (5,2), (2,2). *Allora se* z *non è identicamente nulla su* D, *esiste* $x \in D$ *tale che* $y(x)$ *non è invertibile.*

(8) *Osservazione.* Osserviamo infine che se nel teorema (3), invece di supporre y invertibile su D, si suppone y invertibile solo su $\overset{\circ}{D}$ e che per ogni $x_0 \in \partial D$ esista $\lim_{x \to x_0 \; x \in \overset{\circ}{D}} y^{-1} z(x)$, va ancora (3,5), come si verifica facilmente.

Analogamente per il teorema (4). Nel teorema (5) invece, la condizione (5,2) implica semplicemente che esiste $c \to H$ tale che $z = yc$.

Se sono quindi assegnate delle condizioni su D tali che, supposta y invertibile su $\overset{\circ}{D}$, venga assicurata l'esistenza di $\lim_{x \to x_0 \; x \in \overset{\circ}{D}} y^{-1} z(x)$ per ogni $x_0 \in \partial D$, la tesi dei teoremi (6) e (7) diventa: se non esiste $c \in H$ tale che $z = yc$, esiste $x \in \overset{\circ}{D}$ tale che $y(x)$ non è invertibile.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. CIMMINO (1936–14) – *Teoremi di confronto fra equazioni o sistemi di equazioni differenziali lineari del second'ordine*, « Seminario Mat. R. Univ. di Roma », (4) *1*, 3–24.

[2] G. CIMMINO (1933) – *Sui sistemi di infinite equazioni differenziali lineari con infinite funzioni incognite*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. » (6) *5* (8), 271–318.

[3] C. CLARK e C. A. SWANSON (1965) – *Comparison theorems for elliptic differential equations*, « Proc. Am. Math. Soc. », *16*, 886–890.

[4] J. B. DIAZ e J. R. MCLAUGHLIN (1969) – *Sturm separation and comparison theorems for ordinary and partial differential equations*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », (8) *9*, 133–194.

[5] K. KREITH (1968) – *A generalized Picone identity*, « Atti Accad, Naz. Lincei, Rend. », *45*, 217–220.

[6] K. KREITH (1969) – *A Sturm theorem for strongly elliptic systems and applications*, « Bull. Am. Math. Soc. », *75*, 1025–1027.

[7] L. M. KUKS (1968) – *Sturm' theorem and oscillation of solutions of strongly elliptic systems* « Soviet Math. Doklady », *3*, 24–27.

[8] C. PONTINI (1973) – *Un teorema di confronto per equazioni differenziali astratte*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (4) *8*, 117–126.