
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

CONRAD BURRI

**Il calcolo dell'angolo di estinzione su di una
superficie cristallografica qualsiasi**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 58 (1975), n.4, p. 629–633.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_4_629_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Cristallografia. — *Il calcolo dell'angolo di estinzione su di una superficie cristallografica qualsiasi.* Nota (*) del Socio Straniero CONRAD BURRI.

SUMMARY. — A simple vector expression is given which provides a general solution for the problem of computing the extinction angles for any given crystal face for any reference direction, irrespective of the crystal system or the symmetry of the indicatrix.

Gli angoli di estinzione su determinate superfici sono uno dei contrassegni più salienti per la caratterizzazione e la determinazione al microscopio di cristalli anisotropi a bassa simmetria. Il loro calcolo in base all'orientazione dell'indicatrice ottica è uno dei problemi classici dell'ottica cristallografica. Fu Michel-Lévy a riconoscerne per primo tutta l'importanza e numerosi sono stati gli Autori che vi si sono impegnati, trattando però quasi esclusivamente casi particolari, ma fino ad ora non è stata data una soluzione generale del problema. Nel prosieguo verrà indicato come si possa ottenere tale soluzione valida per tutti i casi che si possono presentare, introducendo metodi vettoriali anziché i metodi di trigonometria sferica quasi esclusivamente impiegati fino ad ora.

Per definizione si intende per angolo di estinzione σ su di una superficie cristallografica F l'angolo tra una delle sue due direzioni di vibrazione $S_{1,2}$ di una onda propagantesi normalmente ad F ed una direzione morfologica R di riferimento, giacente in F . Questa può essere uno spigolo, una traccia di sfaldatura od un limite di geminazione ed è definita dall'intersezione della superficie F con altra superficie cristallografica E . l'angolo di estinzione σ ha perciò un lato definito otticamente e l'altro morfologicamente e per il calcolo si deve conoscere la loro orientazione nello spazio (fig. 1 a).

Definendo le superfici F ed E per mezzo dei vettori f ed e ad esse normali, il vettore R della direzione di riferimento risulta:

$$(1) \quad R = [f \times e].$$

Essendo le due vibrazioni $S_{1,2}$ reciprocamente perpendicolari, basta considerarne una sola. Tuttavia dev'essere noto se si tratta dell'onda più lenta, avente l'indice maggiore n'_γ o dell'onda più veloce, avente l'indice minore n'_α . Associando ad essa il vettore s , si ottiene l'angolo di estinzione σ dal prodotto scalare $(R \cdot s)$:

$$(2) \quad \cos \sigma = \frac{(R \cdot s)}{|R| \cdot |s|} = \frac{([f \times e] \cdot s)}{|f \times e| \cdot |s|}.$$

(*) Presentata nella seduta del 12 aprile 1975.

Ma $([f \times e] \cdot s) = [fes] = V$ è il volume del parallelepipedo formato dai tre vettori f, e, s , che corrisponde anche al prodotto della base G per l'altezza h .

Prendendo come base la faccia del parallelepipedo da f ad e , risulta $G = [f \times e]$ e $h = |s| \cos \sigma$. Passando ai vettori unitari ed indicando con V_0

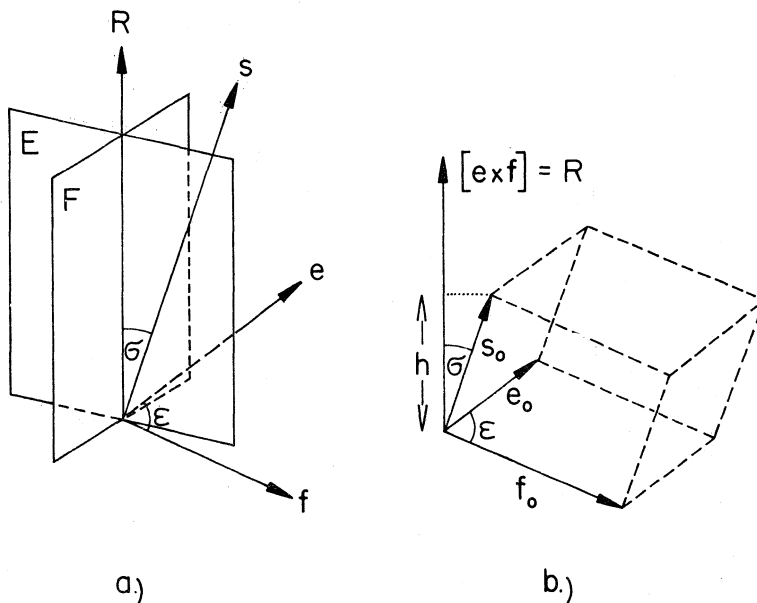


Fig. 1.

il volume del parallelepipedo definito dai vettori unitari f_0, e_0, s_0 e con ε l'angolo (f_0, e_0) , segue la semplice relazione, fondamentale per il metodo qui descritto (fig. 1 b).

$$(3) \quad \cos \sigma = \frac{V_0}{G_0} = \frac{V_0}{\sin \varepsilon} = h$$

cioè il coseno dell'angolo di estinzione σ ricercato è uguale all'altezza del parallelepipedo definito dai tre vettori unitari f_0, e_0, s_0 ed avente per base la faccia definita dai vettori unitari f_0 ed e_0 . L'angolo di estinzione σ stesso è allora uguale all'inclinazione del parallelepipedo rispetto alla normale $R = [f_0 \times e_0]$ alla base. La successione dei tre vettori dev'essere tale da costituire un sistema destrorso con σ acuto, altrimenti V_0 risulta negativo. L'angolo ε risulta dal prodotto scalare $(f_0 \cdot e_0) = \cos \varepsilon$.

È quindi possibile rappresentare l'angolo di estinzione σ per una qualsiasi superficie cristallografica F rispetto ad una qualsiasi direzione di riferimento R per mezzo di una semplice espressione vettoriale chiaramente interpretabile in chiave geometrica. Quest'espressione è indipendente sia dal sistema cristallino, che dalla simmetria della indicatrice, non essendosi fatta alcuna ipotesi in proposito.

Per rendere possibile il calcolo bisogna introdurre un sistema di riferimento, scegliendolo in modo tale che i calcoli si presentino nella forma più

semplice possibile. È necessario pure che i vettori unitari f_0 ed e_0 vi si possano riferire facilmente in base all'usuale simbologia cristallografica e che sia applicabile anche a sistemi cristallini di bassa simmetria. Per rispettare queste condizioni è sufficiente un sistema ortogonale destrorso così definito:

$Z = [001] \circ [0001]$ nei sistemi trigonale e esagonale, vale a dire l'asse c ;

$Y = \perp (010) \circ \perp (\bar{1}2\bar{1}0)$ nei sistemi trigonale ed esagonale;

$X \perp$ al piano YZ .

Questo sistema coincide anche con quello cui si riferisce l'orientazione ottica dei plagioclasti secondo Fedorow, Michel-Lévy e Becke, ed è in stretta correlazione con il sistema di coordinate polari di Goldschmidt, cosicchè si possono impiegare le indicazioni di questo autore nelle note «Winkeltabellen», per la formazione dei vettori normali alle superfici che interessano.

Il vettore s della direzione di vibrazione risulta, quando ci si limiti per ora a cristalli otticamente biassici, dal teorema di Fresnel, che tuttavia dev'essere leggermente modificato per la formulazione vettoriale. Allo scopo si innalzano le normali $r_{1,2}$ ai due piani formati dalla normale ad F e dagli assi ottici A e B . Le direzioni di vibrazione $S_{1,2}$ cercate sono allora le bisettrici degli angoli tra le due normali. In forma vettoriale:

$$(4) \quad r_1 = [A \times f] \quad r_2 = [B \times f] \quad s_{1,2} = r_{1,2} \pm r_{2,1}.$$

Quindi anche il secondo lato dell'angolo di estinzione, definito otticamente, resta formulato e si possono impiegare le espressioni (2) o (3).

Per i cristalli otticamente monoassici si verifica un caso particolare, ovvero i due assi ottici A e B vengono a coincidere nel solo asse A ed anche i due piani definiti dalla normale alla superficie e dagli assi ottici vengono a coincidere in un solo, corrispondente ad una sezione principale dell'indicatrice. Delle due onde propagantisi nel cristallo, una, la cosiddetta ordinaria S_o vibra normalmente al piano suddetto e l'altra, la straordinaria S_e parallelamente. Perciò si ottiene per le loro direzioni di vibrazione:

$$(5) \quad s_o = [f \times A] \quad s_e = [f \times s_o]$$

in cui $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è il vettore dell'asse ottico.

Della seconda espressione della (5) si può eliminare s_o per mezzo della prima, in tal modo il vettore della direzione di vibrazione straordinaria si esprime senza bisogno di quello della vibrazione ordinaria:

$$(6) \quad s_e = f \times [f \times A]$$

che si può ricondurre alla forma $s_e = mf - nA$:

$$(7) \quad s_e = (f \cdot A) f - (f \cdot f) A = (f \cdot A) f - |f|^2 A$$

o rispettivamente, se si passa ai vettori unitari:

$$(7a) \quad \mathbf{s}_e = (\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{A}_0) \mathbf{f}_0 - \mathbf{A}_0.$$

Anche qui, bisogna scegliere la successione dei vettori in modo di formare un sistema destrorso. Essendo ora noto $\mathbf{s}$, si può applicare nuovamente la (2) o rispettivamente la (3).

Esempio. Calcolo dell'angolo di estinzione σ su $F = (001)$ rispetto alla traccia di $E = (010)$ per l'albite della Grønlandia.

Dati cristallografici secondo Dreyer e Goldschmidt, «Medd.om Grønland», 34 (1907), 1-60:

$$(001) = F : \varphi = 82.0^\circ \quad \rho = 26.65^\circ; \quad (010) = E : \varphi = 0^\circ \quad \rho = 90^\circ.$$

Dati ottici secondo Grosspietsch, «Tschermak's Mitt. N. F.» 27 (1908), 353-376:

Posizioni degli assi ottici nel sistema di coordinate sferiche di Michel-Lévy e Becke:

$$\text{asse A} : \lambda^* = + 64.2^\circ, \quad \varphi^* = - 49.1^\circ; \quad \text{asse B} : \lambda^* = - 76.5^\circ, \quad \varphi^* = - 47.8^\circ.$$

Per i vettori normali unitari si ottiene da F ed E :

$$\mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin \rho \\ \cos \varphi \sin \rho \\ \cos \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.447261 \\ 0.062858 \\ 0.892192 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per i vettori unitari degli assi ottici risulta:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \sin \lambda^* \cos \varphi^* \\ \sin \varphi^* \\ \cos \lambda^* \cos \varphi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.589475 \\ -0.755854 \\ 0.284964 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0.653161 \\ -0.740805 \\ 0.156810 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_1 = [\mathbf{A}_0 \times \mathbf{f}_0] = \begin{pmatrix} -0.692279 \\ 0.653378 \\ 0.301011 \end{pmatrix} \quad \text{vettore unitario: } \mathbf{r}_{1_0} = \begin{pmatrix} -0.693403 \\ 0.654439 \\ 0.301500 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = [\mathbf{B}_0 \times \mathbf{f}_0] = \begin{pmatrix} -0.670797 \\ -0.512610 \\ 0.372390 \end{pmatrix} \quad \text{vettore unitario: } \mathbf{r}_{2_0} = \begin{pmatrix} -0.726978 \\ -0.555542 \\ 0.403579 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{1_0} + \mathbf{r}_{2_0} = \begin{pmatrix} -1.420381 \\ 0.098897 \\ 0.705079 \end{pmatrix} = \mathbf{s}'_{n_\alpha} \quad \text{vettore unitario } \mathbf{s}'_{n_{\alpha_0}} = \begin{pmatrix} -0.893976 \\ 0.062245 \\ 0.443771 \end{pmatrix}$$

$$V_0 = [\mathbf{e}_0 \mathbf{f}_0 \mathbf{s}_0] = 0.996080 \quad (\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_0) = \cos \varepsilon = 0.062858. \quad \varepsilon = 86.4^\circ,$$

$$\sin \varepsilon = 0.998022 = G_0$$

$$\cos \sigma = \frac{V_0}{G_0} = \frac{0.996080}{0.998022} = 0.998054 \quad \text{da cui} \quad \sigma = 3.57^\circ$$

(misura di Grosspietsch: 3.6°).

Conformemente alla regola di Schuster bisogna considerare quest'angolo come positivo. Nello stesso modo si ottiene l'angolo di estinzione su $F' = (010)$ rispetto alla traccia di $E' = (001)$ di $\sigma = -20.47^\circ$ (misura di Grosspietsch: -20.3°).