
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

RICCARDO CENERINI

**Dispersione idrodinamica di una sostanza inquinante
nel terreno. Nota I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 58 (1975), n.4, p. 593–604.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_4_593_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica dei continui. — *Dispersione idrodinamica di una sostanza inquinante nel terreno.* Nota I di RICCARDO CENERINI (*), presentata (**) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — Hydrodynamic dispersion of a chemical in a porous saturated medium is solved theoretically in radial geometry, with a boundary condition of practical interest.

Constant radial water flow-rate is assumed and absorption of the soil and radioactive decay of the tracer are considered.

Theoretical curves are given for some values of the parameters governing the hydrodynamic dispersion.

1. INTRODUZIONE

L'analisi della dispersione idrodinamica di una sostanza in un ammasso poroso, presenta un interesse attuale in relazione alla immissione nel terreno di crescenti quantità di materiali inquinanti (rifiuti di vario genere sia in superficie che in profondità, erbicidi e pesticidi in agricoltura, ecc.), con pericoli di contaminazione delle falde acquifere e dei corpi idrici in genere.

I parametri principali che intervengono nel movimento di una soluzione nel terreno, sono il coefficiente di dispersione della sostanza nell'ammasso poroso preso in esame e la eventuale velocità di filtrazione dell'acqua.

La sostanza immessa può essere soggetta, nel corso del movimento, ad interazioni di vario genere con il terreno ed inoltre a degradazione biologica, ia cambiamenti chimici o a decadimento radioattivo.

In questo articolo viene affrontato analiticamente il problema in geometria radiale per alcune condizioni iniziali e al contorno di interesse pratico.

2. IL MODELLO

Consideriamo un ammasso poroso saturo d'acqua.

Occorre risolvere prima il problema della filtrazione dell'acqua per ricavarne la distribuzione di velocità da introdurre nell'equazione della dispersione.

In geometria (r, ϑ) , assunta una altezza unitaria dell'ammasso poroso con un coefficiente di dispersione k_0 , il fenomeno della dispersione è descritto da:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial t} = - \frac{J_r}{r} - \frac{\partial J_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial J_\vartheta}{\partial \vartheta} \quad (\text{conservazione della massa}) \\ J_r = - k_0 \frac{\partial c}{\partial r} + U_{0r} c \\ J_\vartheta = - \frac{k_0}{r} \frac{\partial c}{\partial \vartheta} + U_{0\vartheta} c \end{array} \right.$$

(*) Istituto di Idraulica dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1975.

ove:

c è la concentrazione della sostanza;

J_r, J_θ sono i flussi della sostanza in direzione radiale e tangenziale;

$U_{0r}, U_{0\theta}$ sono le componenti radiali e tangenziali della velocità di filtrazione dell'acqua;

k_0 è il coefficiente di dispersione idrodinamica del materiale nel sistema terreno-acqua. La diffusione libera di ioni o di molecole in acqua ferma è un processo che avviene con un coefficiente di diffusione molecolare dell'ordine di 10^{-5} cm²/sec per varie sostanze in soluzione di interesse pratico (ad esempio HCl, NaCl, CaCl₂, Na₂SO₄, MgSO₄, KCl).

Tale coefficiente dipende dalla temperatura e dalla concentrazione della soluzione.

Quando il movimento avviene in un ammasso poroso, la dispersione può essere fortemente influenzata anche da altri parametri quali: la velocità di filtrazione dell'acqua, l'assorbimento della sostanza da parte del terreno, la forma dei pori che determina le traiettorie a cui è obbligata la soluzione, le interazioni ioniche con possibili modifiche della viscosità dell'acqua, ecc.

L'assorbimento può essere sensibile e comporta riduzioni di k_0 quando vi è affinità chimica fra soluto e terreno. Ciò si verifica, per esempio, per i rifiuti radioattivi costituiti da metalli pesanti, o terre alcaline che presentano una forte affinità con l'argilla e i sedimenti calcarei [1] [2].

Un numero crescente di ricerche sono state dedicate recentemente alla determinazione sperimentale (usualmente con spettroscopia gamma) della migrazione dei radionuclidi nel terreno [3]. Le misure effettuate sembrano dimostrare che le proprietà di scambio ionico del terreno sono dovute essenzialmente alle frazioni dell'argilla e che in genere i componenti cationici dei prodotti di fissione radioattivi sono trattenuti nei primi strati del terreno (specie se in questo sono presenti taluni ioni estranei), mentre gli anioni (esempio complessi del radioiodo) possono venire ritrovati a distanze notevoli.

In caso di simmetria radiale ($J_\theta = 0$) e ammettendo in via approssimata che il coefficiente k_0 sia costante e che prevalga quindi il fenomeno di diffusione molecolare con concentrazioni non troppo elevate, le (1) si riducono a:

$$(2) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = k_0 \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) - U_{0r} \left(\frac{c}{r} + \frac{\partial c}{\partial r} \right) - c \frac{\partial U_{0r}}{\partial r}.$$

L'assorbimento da parte del suolo comporta il passaggio di parte della sostanza dalla fase liquida alle particelle solide del terreno e può essere considerato inserendo a secondo membro della (2) il seguente termine (legge di Freunlich):

$$(3) \quad - \alpha R \frac{\partial c}{\partial t}$$

ove:

$$R = e^{\Delta G / h T N_a}$$

con:

ΔG = energia libera del termine di assorbimento (Cal/mole);

N_a = numero di Avogadro;

h = costante di Boltzmann;

T = temperatura assoluta;

α = rapporto dell'area attiva delle particelle del terreno rispetto all'area totale delle stesse.

La (2) diviene quindi

$$(4) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) - U_r \left(\frac{c}{r} + \frac{\partial c}{\partial r} \right) - c \frac{\partial U_r}{\partial r}$$

avendo posto:

$$(5) \quad k = \frac{k_0}{1 + \alpha R} \quad ; \quad U_r = \frac{U_{0r}}{1 + \alpha R}.$$

L'eventuale decadimento radioattivo della sostanza che diffonde nel terreno, può venire inserito tenendo presente che esso comporta una riduzione del nuclide dopo il tempo t secondo la legge:

$$c = c_0 e^{-\lambda t}$$

ove:

c_0 = concentrazione per $t = 0$;

λ = costante di decadimento propria del nuclide $\left(\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}} \right.$ ove $T_{1/2}$ è il tempo di dimezzamento).

Con l'assorbimento e il decadimento radioattivo l'equazione della dispersione diviene:

$$(6) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) - U_r \left(\frac{c}{r} + \frac{\partial c}{\partial r} \right) - c \frac{\partial U_r}{\partial r} - \lambda c.$$

3. SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DELLA DISPERSIONE

Ammettiamo che il moto filtrante dell'acqua sia stazionario e che la velocità U_r abbia la dipendenza:

$$U_r = \frac{u_1}{r} = \frac{u_{10}}{r(1 + \alpha R)}$$

e cioè si abbia una portata radiale costante dell'acqua.

La (6) diviene in tale ipotesi:

$$(7) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1 - \frac{u_1}{k}}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \lambda c.$$

Si trasformi la (7) con Laplace rispetto al tempo:

$$\bar{c}(r, s) = \mathcal{L}[c(r, t)] = \int_0^\infty e^{-st} c \, dt.$$

Ammettendo che all'istante iniziale la concentrazione sia ovunque nulla si ottiene:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial r^2} + \frac{1 - \frac{u_1}{k}}{r} \frac{\partial \bar{c}}{\partial r} - \frac{s + \lambda}{k} \bar{c} = 0$$

che dà:

$$(9) \quad \bar{c}(r, s) = r^\nu \left[\text{AI}_\nu \left(\sqrt{\frac{s + \lambda}{k}} r \right) + \text{BK}_\nu \left(\sqrt{\frac{s + \lambda}{k}} r \right) \right]$$

avendo posto:

$$\frac{u_1}{2k} = \nu$$

e avendo indicato con I_ν e K_ν le funzioni di Bessel modificate di ordine ν .

Poiché fisicamente deve aversi:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} c = 0$$

si deduce:

$A = 0$ e la (9) diviene:

$$(10) \quad \bar{c}(r, s) = \text{BK}_\nu \left(\sqrt{\frac{s + \lambda}{k}} r \right).$$

Consideriamo come condizioni iniziali e al contorno:

$$(11) \quad \begin{cases} c(r, t = 0) = 0 \\ c(r = 0, t > 0) = c_0 e^{-\lambda t}. \end{cases}$$

Le (11) equivalgono, in pratica, all'inserimento all'istante iniziale in un pozzo profondo nel terreno, di area molto piccola rispetto a quella sotto controllo, di una sostanza la cui concentrazione vi può essere considerata (salvo il suo eventuale decadimento radioattivo) costante nel tempo durante il quale interessa esaminare il fenomeno.

Questa tecnica è talvolta impiegata per lo smaltimento con iniezione sotterranea di rifiuti liquidi di origine industriale.

Nella seconda parte di questo studio verranno prese in esame altre condizioni iniziali e al contorno che possono verificarsi in pratica.

Per ricavare l'espressione di B, si noti anzitutto che la seconda delle (11) ha per trasformata:

$$(12) \quad \bar{c}(0, s) = \frac{c_0}{s + \lambda}.$$

L'antitrasformata della (10) viene notevolmente agevolata se si osserva che è (per $v \neq 0$):

$$(13) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{c_0 (s + \lambda)^{\frac{v}{2} - 1} \cdot r^v}{2^{v-1} k^{v/2} \Gamma(v)} \cdot K_v \left(\sqrt{\frac{s + \lambda}{k}} r \right) =$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(s + \lambda)^{\frac{v}{2} - 1} \cdot r^v}{2^{v-1} k^{v/2} \Gamma(v)} \frac{1}{2} \Gamma(v) \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{s + \lambda}{k}} r \right)^{-v} = \frac{c_0}{s + \lambda}$$

ove con:

$$\Gamma(v) = \int_0^\infty e^{-x} x^{v-1} dx$$

si è indicata la funzione gamma.

Grazie alla (13), la (12) è soddisfatta se per il coefficiente B che compare nella (10) si pone:

$$(14) \quad B = \frac{c_0 (s + \lambda)^{\frac{v}{2} - 1}}{2^{v-1} k^{v/2} \Gamma(v)}.$$

Con tale posizione la antitrasformata della (10) è data da [4]:

$$(15) \quad c(r, t) = \mathcal{L}^{-1} [\bar{c}(r, s)] = c_0 e^{-\lambda t} \frac{\Gamma\left(v, \frac{r^2}{4kt}\right)}{\Gamma(v)}$$

ove:

$$(16) \quad \Gamma\left(v, \frac{r^2}{4kt}\right) = \int_{r^2/4kt}^\infty e^{-x} x^{v-1} dx$$

è la funzione gamma incompleta.

La (15) risolve il problema per le condizioni iniziali e al contorno indicate in (11).

La (15) dimostra che, in linea teorica, al crescere indefinito del tempo si stabilisce in tutti i punti la concentrazione imposta nell'origine, se non avvengono, nel frattempo, modifiche della sostanza.

Il metodo seguito non è valido per $u_1 = 0$, cioè in assenza di moto di filtrazione dell'acqua.

A tale proposito è conveniente calcolare dalla (15) la quantità di materiale q che nell'unità di tempo passa attraverso la superficie cilindrica di altezza unitaria e raggio r .

Considerato che il flusso radiale è dato dalla seconda delle (1), si ha:

$$(17) \quad q(r, t) = 2 \pi r J_r = 2 \pi r \left(-k \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{u_1}{r} c \right) = \\ = \frac{2 \pi c_0 e^{-\lambda t}}{\Gamma(\nu)} \left[2 k e^{-\frac{r^2}{4kt}} \left(\frac{r^2}{4kt} \right)^\nu + u_1 \Gamma \left(\nu, \frac{r^2}{4kt} \right) \right].$$

Nell'origine la (17) diviene:

$$q_0 = q(0, t) = 2 \pi c_0 e^{-\lambda t} u_1.$$

La (15) può quindi essere espressa, facendo comparire q_0 , come segue:

$$(19) \quad c(r, t) = \frac{q_0 \Gamma \left(\nu, \frac{r^2}{4kt} \right)}{2 \pi u_1 \Gamma(\nu)}.$$

La (19) è valida anche per $u_1 = 0$ e si riduce in tal caso, passando al limite, a:

$$(19 \text{ bis}) \quad c(r, t) = \frac{q_0}{4 \pi k} \Gamma \left(\frac{r^2}{4kt} \right).$$

Tale risultato si ottiene anche osservando che per $u_1 = 0$ la (7) si riconduce (escludendo il termine di decadimento) alla nota equazione della conduzione del calore, e per una sorgente nell'origine di intensità q_0 costante nel tempo, porta a [5]:

$$(20) \quad c(r, t) = \frac{q_0}{4 \pi k} \int_{\frac{r^2}{4kt}}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = \frac{q_0}{4 \pi k} \Gamma \left(\frac{r^2}{4kt} \right).$$

È interessante confrontare la soluzione (15) ricavata per la geometria radiale, con quella in geometria x .

Si ammetta che l'ammasso poroso (ove sia $c = 0$ all'istante iniziale) occupi il semipiano delle x positive e che sull'asse $x = 0$, a partire dall'istante iniziale, venga mantenuta una concentrazione $c_0 e^{-\lambda t}$. In pratica ciò può corrispondere allo spargimento di una sostanza su una notevole area, mentre il moto verticale dell'acqua di filtrazione può essere causato dalla pioggia.

In luogo della (6) si ha:

$$(21) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U \frac{\partial c}{\partial x} - \lambda c.$$

Trasformando rispetto a Laplace nel tempo si ha:

$$(22) \quad \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - \frac{U}{k} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \frac{\lambda + s}{k} \bar{c} = 0$$

la cui soluzione (che soddisfa alla condizione $\lim_{x \rightarrow \infty} c = 0$) è:

$$(23) \quad \bar{c}(x, s) = A e^{x \left[\frac{U}{2k} - \left(\frac{U^2}{4k^2} + \frac{\lambda + s}{k} \right)^{1/2} \right]}.$$

Imponendo per $x = 0$:

$$(24) \quad \bar{c}(0, s) = \frac{c_0}{s + \lambda}$$

viene determinato il valore di A e la antitrasformata della (23) è [4]:

$$(25) \quad c(x, t) = \mathcal{L}^{-1} [\bar{c}(x, s)] = \\ = \frac{1}{2} c_0 e^{\frac{xU}{2k} - \lambda t} \left[e^{-\frac{xU}{2k}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - Ut}{2 \sqrt{kt}} \right) + e^{\frac{xU}{2k}} \operatorname{erfc} \left(\frac{x + Ut}{2 \sqrt{kt}} \right) \right].$$

La (23) può essere risolta anche imponendo nell'origine in luogo della (24):

$$(24 \text{ bis}) \quad \bar{c}(0, s) = \frac{c_0}{s}$$

cioè ammettendo che il decadimento radioattivo avvenga solo nel corso della migrazione del radionuclide e che la concentrazione in $x = 0$ rimanga costante nel tempo.

In tale ipotesi si ricava con alcuni passaggi:

$$(25 \text{ bis}) \quad c(x, t) = \frac{1}{2} c_0 e^{\frac{xU}{2k}} \left\{ e^{-x \left(\frac{U^2}{4k^2} + \frac{\lambda}{k} \right)^{1/2}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x - (U^2 + 4\lambda k)^{1/2} t}{2 \sqrt{kt}} \right] + \right. \\ \left. + e^{x \left(\frac{U^2}{4k^2} + \frac{\lambda}{k} \right)^{1/2}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x + (U^2 + 4\lambda k)^{1/2} t}{2 \sqrt{kt}} \right] \right\}.$$

Le (25) e (25 bis) sono valide anche per $U = 0$.

4. ALCUNE VALUTAZIONI NUMERICHE

A titolo indicativo vengono fatte alcune valutazioni numeriche in geometria radiale relative alla (15), ammettendo $\lambda = 0$.

I calcoli sono agevolati ricordando che:

$$(26) \quad \frac{\Gamma\left(\nu, \frac{r^2}{4kt}\right)}{\Gamma(\nu)} = Q\left(\frac{r^2}{2kt} \middle| 2\nu\right)$$

ove:

$$(27) \quad Q\left(\frac{r^2}{2kt} \middle| 2\nu\right) = [2^\nu \Gamma(\nu)]^{-1} \int_{r^2/2kt}^{\infty} (x)^{\nu-1} e^{-x/2} dx$$

è la funzione di probabilità chi-quadrato che è tabulata [6].

curva 1: $r = 1$ cm; $\frac{u_1}{2k} = 1$

curva 3: $r = 4$ cm; $\frac{u_1}{2k} = 1$

curva 2: $r = 1$ cm; $\frac{u_1}{2k} = 0,5$

curva 4: $r = 4$ cm; $\frac{u_1}{2k} = 0,5$

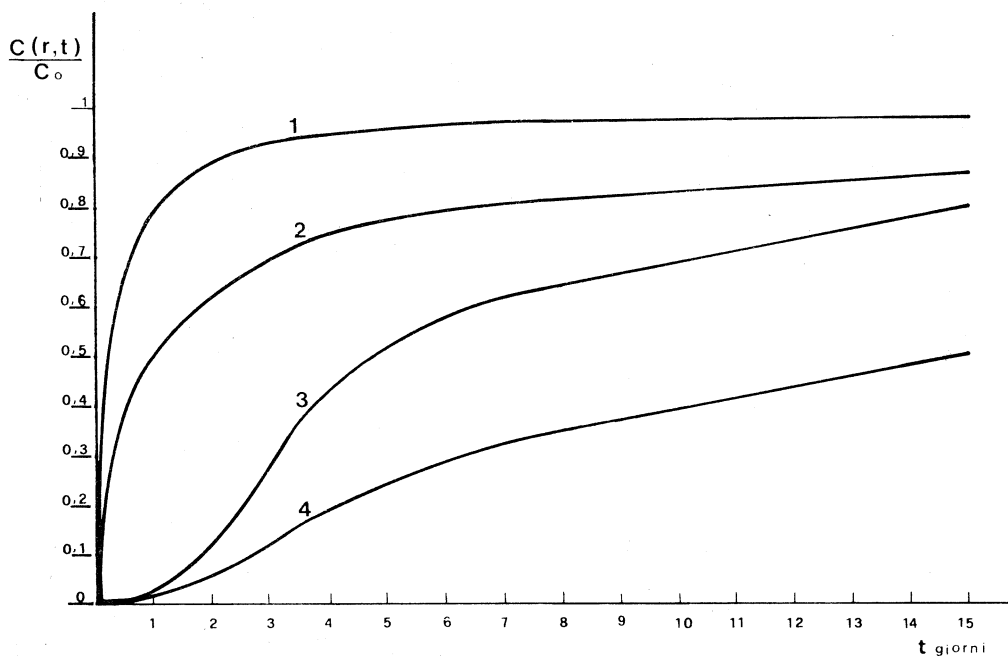


Fig. 1. - Andamento della concentrazione in funzione del tempo in due posizioni prefissate e per due valori del rapporto $\frac{u_1}{2k}$ ($k = k_0 = 10^{-5}$ cm²/sec. $\Delta G = 0$).

La fig. 1 (nella quale, così come nelle successive, si assume $\lambda = 0$) riporta la concentrazione in funzione del tempo per due valori del raggio, e per due valori del rapporto ν assumendo per il coefficiente di dispersione: $k = k_0 = 10^{-5}$ cm²/sec, in assenza di assorbimento ($\Delta G = 0$).

La fig. 2 mostra l'influenza dell'assorbimento del terreno passando da $\Delta G = 0$ (assorbimento nullo) a $\Delta G = 6$ kcal./mole per due valori di α (rapporto dell'area attiva della particella del terreno rispetto alla loro area totale), assumendo, $k_0 = 10^{-5}$ cm²/sec; $r = 1$ cm; $v = 0,5$.

Un aumento dell'assorbimento ha lo stesso effetto di una riduzione della velocità di filtrazione dell'acqua.

curva 1: $\Delta G = 0$

curva 2: $\Delta G = 4$ kcal/mole; $\alpha = 10^{-4}$

curva 3: $\Delta G = 4$ kcal/mole; $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$

curva 4: $\Delta G = 6$ kcal/mole; $\alpha = 10^{-4}$

curva 5: $\Delta G = 6$ kcal/mole; $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$

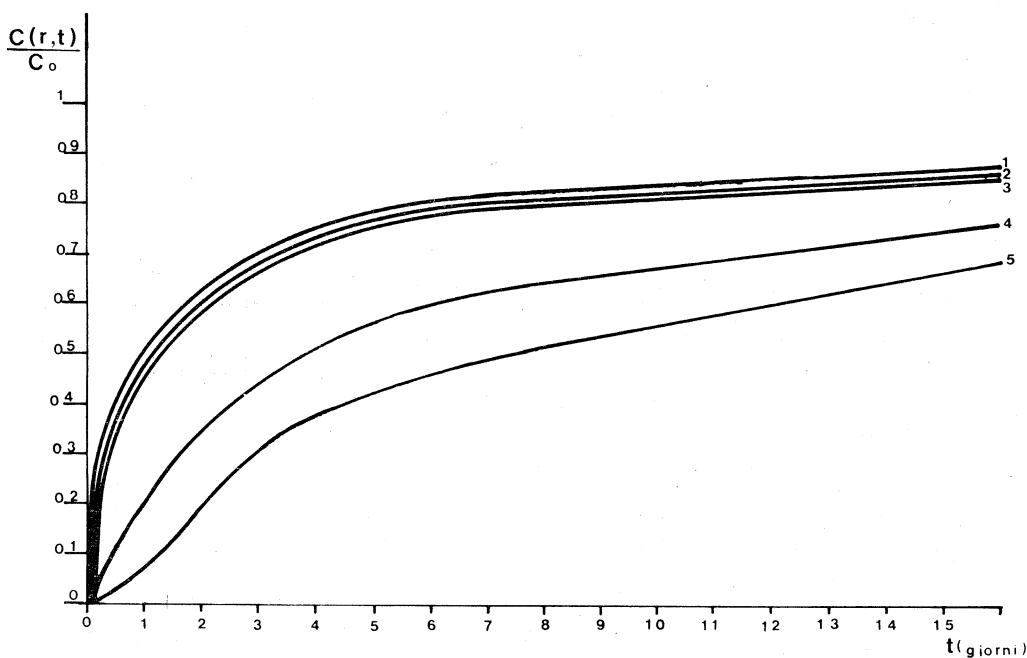
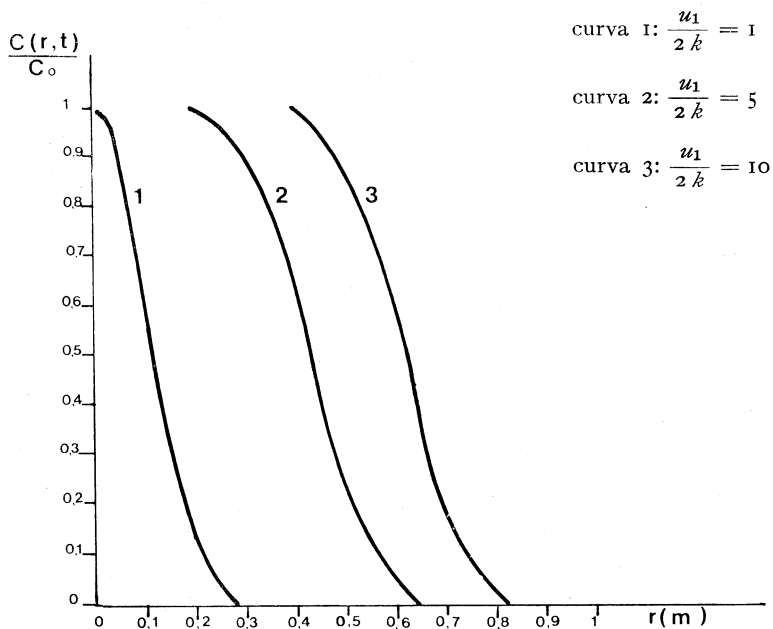


Fig. 2. — Influenza dell'assorbimento del terreno sull'andamento temporale della concentrazione in un punto prefissato ($r = 1$ cm) ($\frac{u_1}{2k} = 0,5$; $k_0 = 10^{-5}$ cm²/sec.).

La fig. 3 riporta per un tempo prefissato ($t = 10^7$ sec ≈ 116 giorni) la posizione del fronte dell'onda che diffonde, per diversi valori del rapporto v ($k = k_0 = 10^{-5}$ cm²/sec; $\Delta G = 0$).

La fig. 4 mostra l'effetto di ritardo dell'assorbimento del terreno sull'avanzamento dell'onda che diffonde, avendo assunto per tutti i casi il valore $v = 250$ ($k_0 = 10^{-5}$ cm²/sec; $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$).

Come si vede, l'assorbimento del terreno può causare un rallentamento sensibile del fronte dell'onda, che tende a divenire più ripido al crescere di ΔG .



curva 4: $\frac{u_1}{2k} = 50$

curva 5: $\frac{u_1}{2k} = 250$

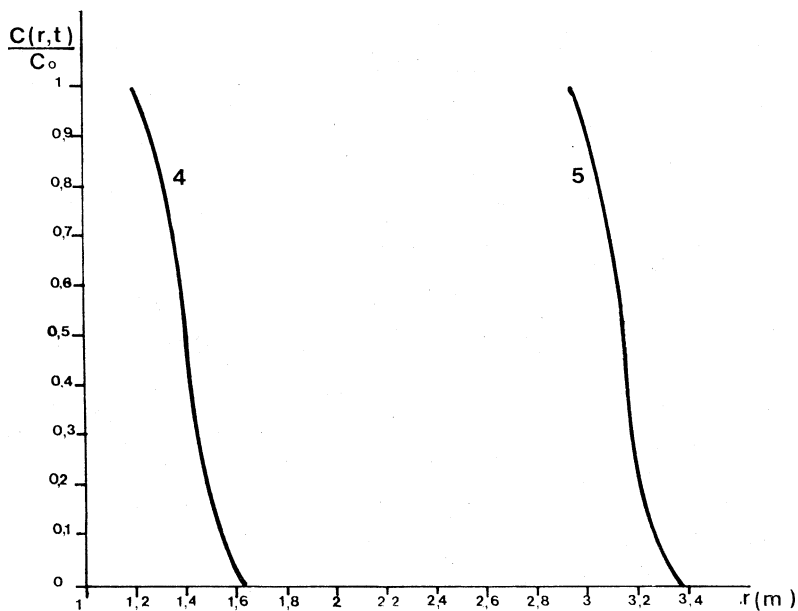


Fig. 3. - Fronte dell'onda inquinante all'istante $t = 10^7$ sec. (≈ 116 giorni) per diversi valori di $\frac{u_1}{2k}$ ($k = k_0 = 10^{-5}$ cm²/sec; $\Delta G = 0$).

Ad una certa distanza dall'origine, il fronte risulta ben definito e separa in modo netto la zona occupata dalla sostanza da quella non ancora raggiunta.

curva 1: $\Delta G = 0$

curva 2: $\Delta G = 4$ kcal/mole

curva 3: $\Delta G = 5$ kcal/mole

curva 4: $\Delta G = 6$ kcal/mole

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_1}{2k} &= 250 \\ k_0 &= 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sec.} \\ \alpha &= 2 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \right\} \text{ per tutti i casi}$$

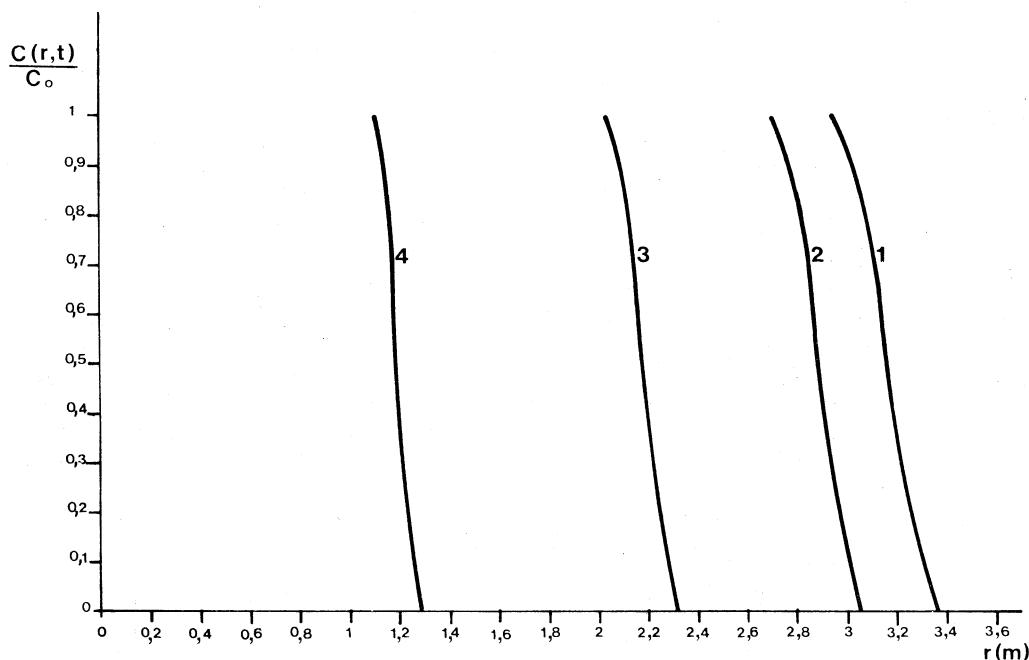


Fig. 4. - Influenza dell'assorbimento del terreno sulla posizione del fronte d'onda in un istante prefissato. ($t = 10^7$ sec. ≈ 116 giorni).

Per valori elevati del rapporto ν ($\nu > 200$), come si possono riscontrare facilmente in pratica, la (15) può scriversi (per $\lambda = 0$):

$$(28) \quad c = c_0 Q \left(\frac{r^2}{2kt} \left| \frac{u_1}{k} \right. \right) \approx c_0 Q_1 \left(\sqrt{\frac{r^2}{kt}} - \sqrt{\frac{2u_1}{k}} \right)$$

ove:

$$Q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy.$$

Se si conviene di definire come posizione del fronte d'onda il valore r_f per cui:

$$\frac{c}{c_0} = 0,5$$

la (28) ne definisce il moto come segue:

$$(29) \quad r_f \approx \sqrt{\frac{2 u_{10}}{1 + \alpha R} t}$$

che consente di prevedere l'avanzamento della sostanza, nota la velocità di filtrazione e l'assorbimento del terreno.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. CASSANO, G. LENZI e A. MARZOCCHI – *Sulla composizione della sabbia e dell'argilla del CNR della Trisaia e sulle loro proprietà di assorbimento di alcuni prodotti di fissione*. Rapporto CNEN-RT/PROT (70), 5.
- [2] *Disposal of radioactive wastes into seas, ocean and surface waters*. Proceeding of a Symposium. Vienna 16–20 May 1966. International Atomic Energy Agency.
- [3] *Environmental behaviour of radionuclides released in the nuclear industry*. Proceedings of a Symposium organized by I.A.E.A., Aix en Provence, 14–18 May 1973, pp. 273 sgg.
- [4] G. E. ROBERTS e H. KAUFMAN (1966) – *Table of Laplace Transforms*. W. B. Saunders Company. Philadelphia and London.
- [5] H. S. CARSLAW e J. C. JAEGER (1971) – *Conduction of heat in solids*. Oxford at the Clarendon Press.
- [6] M. ABRAMOWITZ e I. A. STEGUN – *Handbook of Mathematical functions*. Dover Publications, Inc., New York.