

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

GIANNANTONIO PEZZOLI

**Sistemi bifase liquido-liquido e modelli geologici**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 58 (1975), n.4, p. 581–592.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1975\\_8\\_58\\_4\\_581\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_4_581_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Meccanica dei continui.** — *Sistemi bifase liquido-liquido e modelli geologici.* Nota di GIANNANTONIO PEZZOLI, presentata (\*) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — In the present work, after studying previous formulas of the geological models theory, a simple mathematical model has been arranged to understand the salt domes formation phenomena.

In particular, this model has been compared with the "inversed" physical model carried out by G. Supino and his group.

The reliability of this model has been proved by the good agreement between the theoretical and experimental results.

La complessa ed interessante questione relativa alla possibilità dei modelli geologici, il cui esame, a mio avviso, è iniziato in una Nota del Somigliana [1] che per primo studiando il moto di un ghiacciaio mostrò che esso era assimilabile ad un moto lento di fluido viscoso, ripresa in seguito dal King Hubbert [2], [3], è stata ulteriormente affrontata con acutezza e rigore analitico dal Supino [4], che ha assegnato le condizioni esatte, dedotte dalle equazioni dei mezzi continui, e non in maniera puramente intuitiva, per poter realizzare modelli geologici.

Successivamente questo Autore ha introdotto il concetto di « modello inverso » e recentemente, insieme a G. Scarpi e L. Montefusco ne ha curato una realizzazione sperimentale [5], con applicazione alla formazione dei duomi salini.

Occorre dire per la verità che tra i lavori del King Hubbert del 1937 e del 1945 molti altri Autori si sono occupati di modellistica geologica ed in particolare della formazione dei duomi, lo Jaeger ed il Cook [6] e soprattutto il Ramberg [7] che oltre a tentarne la riproduzione simulando la gravità con un opportuno campo centrifugo, ne ha cercato anche un'interpretazione teorica basata sullo studio della stabilità dell'interfaccia di un sistema liquido-liquido.

Ritengo utile riassumere dapprima brevemente le vedute di G. Supino e le sue conclusioni in materia.

In un corpo qualunque (solido, liquido, gassoso) in moto, soggetto a forze di massa  $F_x, F_y, F_z$  e a forze superficiali  $P_x, P_y, P_z$ , valgono, come è noto, le equazioni indefinite

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z_1} = \rho \left( F_x - \frac{Dv_1}{Dt_1} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y_1} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z_1} = \rho \left( F_y - \frac{Dv_1}{Dt_1} \right) \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z_1} = \rho \left( F_z - \frac{Dv_1}{Dt_1} \right) \end{array} \right.$$

(\*) Nella seduta dell'8 marzo 1975.

valide in ogni punto interno, dove  $Du_1/Dt_1, Dv_1/Dt_1, Dw_1/Dt_1$  sono le derivate sostanziali di  $u_1, v_1, w_1$ , cioè le componenti della accelerazione della particella che nel tempo  $t_1$  passa per il punto di coordinate  $x_1, y_1, z_1$ ; mentre in ogni punto della superficie limite sono assegnate le condizioni al contorno

$$\begin{cases} \sigma_x \cos(n, x_1) + \tau_{xy} \cos(n, y_1) + \tau_{zx} \cos(n, z_1) = P_x \\ \tau_{yx} \cos(n, x_1) + \sigma_y \cos(n, y_1) + \tau_{yz} \cos(n, z_1) = P_y \\ \tau_{zx} \cos(n, x_1) + \tau_{yz} \cos(n, y_1) + \sigma_z \cos(n, z_1) = P_z. \end{cases}$$

Queste equazioni, scritte con la simbologia corrente, valgono in ogni campo (elastico, plastico, viscoso) ma lasciano impregiudicato il tipo di legame fra tensioni interne e deformazioni o velocità di deformazione.

Se si ammette tra tensioni e velocità di deformazione il legame dato dalle

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma_x = p_1 - 2\eta \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \sigma_y = p_1 - 2\eta \frac{\partial v_1}{\partial y_1}, & \sigma_z = p_1 - 2\eta \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \\ \tau_{yz} = -\eta \left( \frac{\partial w_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial z_1} \right), & \tau_{zx} = -\eta \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right), \\ \tau_{xy} = -\eta \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) \end{cases}$$

e si considera il mezzo incomprimibile, che comporta la

$$(4) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0$$

si giunge, in luogo delle (1), alle equazioni dei liquidi viscosi in forma adimensionale

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} - A\Delta_2 u = \frac{F_x}{g} - F \frac{Du}{Dt} \\ \frac{\partial p}{\partial y} - A\Delta_2 v = \frac{F_y}{g} - F \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{\partial p}{\partial z} - A\Delta_2 w = \frac{F_z}{g} - F \frac{Dw}{Dt} \end{cases}$$

essendo

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \left( F = \frac{V^2}{gl}, A = \frac{\eta V}{\gamma l^2} \right)$$

ed avendo inoltre posto

$$(7) \quad \begin{cases} x = \frac{x_1}{l}, & y = \frac{y_1}{l}, & z = \frac{z_1}{l}, & u = \frac{u_1}{V} \\ v = \frac{v_1}{V}, & w = \frac{w_1}{V}, & t = \frac{V}{l} t_1, & p = \frac{p_1}{\gamma l}. \end{cases}$$

È ovvio che  $l$  e  $V$  rappresentano una dimensione lineare ed una velocità arbitrarie ma costanti e caratteristiche del fenomeno in esame.

Se si studia invece il comportamento di un corpo plastico, allora alle equazioni (1) e (2) si deve aggiungere la condizione di scorrimento; si ammette

che la plasticità si manifesti quando le tensioni interne (o una loro funzione scelta opportunamente) raggiungono un certo valore al disotto del quale si resta nel campo elastico determinato dalla legge di Hooke in cui non si manifestano deformazioni permanenti.

La condizione di scorrimento più comunemente ammessa è che sia

$$(8) \quad J_2 - K^2 = 0$$

dove  $K$  è una opportuna costante e  $J_2$  è l'invariante definito da

$$(9) \quad J_2 = \frac{1}{2}(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$

che è proporzionale all'energia di deformazione, e dove a loro volta le  $S_i$  ( $i = x, y, z$ ) sono definite da

$$(10) \quad S_i = \sigma_i - S, \quad S = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Per quanto concerne il legame tra tensioni e velocità di deformazione, fatte le posizioni

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{\mu}{2G} S_x, & \frac{\partial v_1}{\partial y_1} &= \frac{\mu}{2G} S_y, & \frac{\partial w_1}{\partial z_1} &= \frac{\mu}{2G} S_z, \\ \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= \frac{\mu}{G} \tau_{yz}, & \frac{\partial v_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_1}{\partial y_1} &= \frac{\mu}{G} \tau_{xy}, & \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} &= \frac{\mu}{G} \tau_{zx}, \\ W &= S_x \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + S_y \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + S_z \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) \tau_{xy} + \\ &+ \left( \frac{\partial v_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_1}{\partial y_1} \right) \tau_{yz} + \left( \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \right) \tau_{zx} \end{aligned}$$

allora segue:

$$(12) \quad GW = \mu J_2$$

e quindi durante lo svolgimento di un fenomeno in campo plastico è:

$$(13) \quad \mu = \frac{GW}{K^2}.$$

Se ora si combinano le relazioni dedotte dalla legge di Hooke e valide in campo elastico, con le (11), si ottengono le equazioni generali per tutto il campo elastoplastico, che qui non interessano nella loro completezza, ma solo nella forma semplificata valida per i moti molto lenti, vale a dire quelli in cui è lecito non tener conto delle azioni inerziali.

Queste equazioni si scrivono

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{G}{\mu} \Delta_2 u_1 + \frac{\partial S}{\partial x_1} &= \rho F_x \\ \frac{G}{\mu} \Delta_2 v_1 + \frac{\partial S}{\partial y_1} &= \rho F_y \\ \frac{G}{\mu} \Delta_2 w_1 + \frac{\partial S}{\partial z_1} &= \rho F_z \end{aligned} \right.$$

equazioni che coincidono con quelle dei liquidi viscosi trascurando in quelle  $D_1 u/Dt$ ,  $Dv_1/Dt$ ,  $Dw_1/Dt$ , e ponendo qui  $\eta = -G/\mu$  (il che dal punto di vista dimensionale è perfettamente corretto).

Si conclude perciò rilevando che la costruzione di un modello di lento scorrimento dal punto di vista dei solidi plastici richiede le stesse trasformazioni dimensionali che la costruzione fatta dal punto di vista dei liquidi viscosi, purché anche nel modello le deformazioni siano lente in modo da poter trascurare le accelerazioni.

Riprese allora le equazioni di Navier scritte in forma adimensionale e considerando moti lenti dovuti alla sola gravità si ottiene

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} - A\Delta_2 u = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} - A\Delta_2 v = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} - A\Delta_2 w = -1. \end{array} \right.$$

Indicando ora con l'indice  $o$  le grandezze relative all'originale e con l'indice  $m$  quelle relative al modello, le (15) portano di conseguenza

$$(16) \quad \frac{\eta_m}{\eta_o} = \frac{\gamma_m}{\gamma_o} \lambda \tau$$

essendo  $\lambda$  e  $\tau$  le scale delle lunghezze e dei tempi.

Si può immediatamente risalire alle relazioni fra le altre grandezze, ed estendere le formule anche al caso in cui intervengano altre forze di massa oltre al peso.

Le osservazioni precedenti pongono in condizioni di eseguire esperienze su modello in problemi di geologia; queste esperienze dovrebbero consentire di verificare sotto l'azione di quali distribuzioni di forze si sono svolte quelle dislocazioni di rocce delle quali conosciamo la situazione finale e presumiamo una data situazione iniziale.

Di fronte a questa posizione può essere utile costruire un modello inverso; cioè un modello nel quale si assume come iniziale la situazione finale (che è conosciuta), si applicano ad esso in ogni punto forze risultanti uguali ed opposte a quelle che si ritiene abbiano agito nel tempo e si controlla se la situazione finale corrisponde a quella che si ritiene esistesse all'inizio del dislocamento.

L'esecuzione sperimentale di un modello inverso effettuata dagli Autori sopra citati [5] ha consentito di stabilire un legame fra altezza iniziale del duomo salino e tempo impiegato per lo sviluppo del duomo stesso.

Nel caso preso in esame, il duomo salino di Barbers Hill (fig. 1) gli Autori hanno trovato (fig. 2) che se la dislocazione iniziale del salgemma entro il calcare era alta  $\sim 1200$  m, il duomo avrebbe raggiunto l'altezza attuale di 3750 m in 24 milioni di anni come valutato dai geologi, mentre una eventuale altezza iniziale di 950 m avrebbe richiesto, per la formazione del duomo, 36 milioni di anni.

Vediamo ora, in maniera elementare, di completare i risultati ottenuti col « modello inverso » e di stabilire un semplicissimo modello matematico del fenomeno geologico della formazione dei duomi salini.

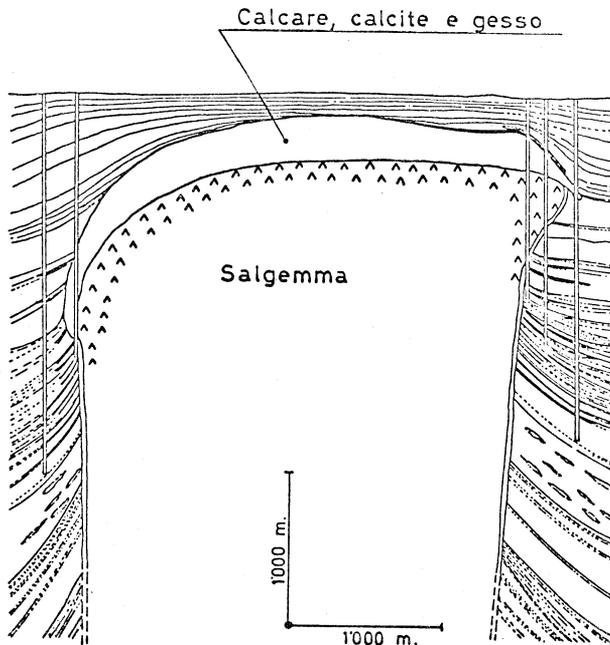


Fig. 1. - Duomo salino di Barbes Hill (Texas). (Dal Nadai-Theory of Flow and Fracture of solids, McGraw-Hill, 1963).

Occorre tuttavia ancora premettere qualche considerazione sulla meccanica del fenomeno: è stato osservato che la teoria modellistica precedentemente riportata mostra che per una forte riduzione delle scale si può passare da un fenomeno che si svolge fra solidi, ad un fenomeno che interessa invece due liquidi.

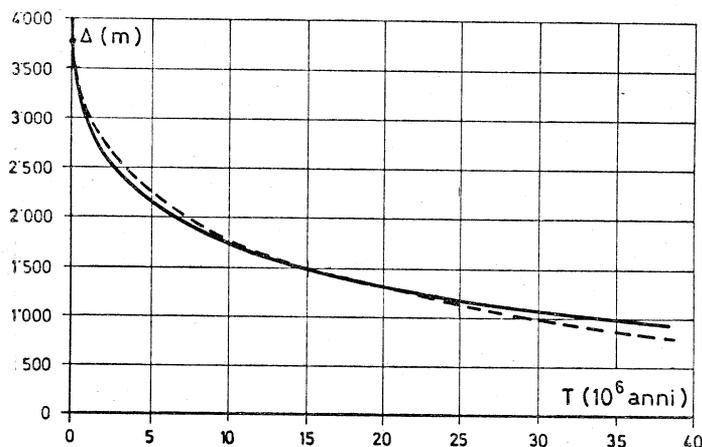


Fig. 2. - Relazione sperimentale da [5], fra l'altezza iniziale  $\Delta$  della cavità ed il tempo  $T$  di formazione del duomo, in linea continua; a tratteggio l'equazione (31).

Questo fatto comporta un'enorme contrazione dei tempi e di conseguenza il fenomeno viene fortemente accelerato; però la presenza di due liquidi stratificati, di cui il superiore a densità maggiore, provocherebbe instabilità mentre in presenza di due solidi l'instabilità non potrebbe esistere: di qui un ulteriore argomento a favore dei modelli geologici inversi.

A mio modo di vedere però questo ragionamento non è completo: fermo restando che il modello geologico inverso (almeno nel caso qui preso in esame) è l'unico di possibile pratica realizzazione e che i suoi risultati sono veramente notevoli, ritengo invece che la formazione dei duomi sia effettivamente dovuta ad instabilità determinata dalla presenza di due mezzi a viscosità e densità diverse, con il mezzo a densità maggiore nello strato superiore.

Questa considerazione è giustificata dal fatto che se l'instabilità deriva analiticamente da un sistema di equazioni, essa deve verificarsi con le approssimazioni fatte sia che queste equazioni rappresentino il moto di un sistema bifase liquido-liquido sia un sistema solido-solido.

Tutto in sostanza dipende dalla scala dei tempi; che si tratti di solidi visco-plastici o di liquidi, risulta solo dal lasso di tempo durante il quale osserviamo il fenomeno.

Questo modo di vedere si riallaccia in certo qual modo alle idee di Kolmogoroff e Gebelein secondo le quali un liquido si può considerare perfetto o viscoso non a seconda del fenomeno in esame, ma (il che in ultima analisi è lo stesso) dal tempo in cui si osserva il comportamento di una particella del fluido.

Per questo tutti i liquidi osservati per un tempo molto breve si comportano come liquidi perfetti, per un tempo molto lungo come viscosi: di conseguenza se osserviamo i due strati per un tempo breve li vediamo in condizioni di equilibrio ed un liquido nelle condizioni suddette si comporta sempre come perfetto.

Eseguendo poi osservazioni a distanza di tempo ci si accorge che le masse si spostano, e se la situazione all'origine non è di equilibrio, vale a dire se è presente ad esempio una cavità nel calcare, riempita da salgemma, questa intrusione verso l'alto costituisce una perturbazione che dà origine ad un moto di instabilità, perché è instabile la situazione configurata dei due liquidi sovrapposti come anzidetto.

Quanto è stato sopra esposto è un'ulteriore conferma della giustezza dell'opinione del Supino [*loc. cit.*], secondo il quale il modello geologico è in sostanza un modello analogico, più che un vero modello fisico.

Vediamo ora di affrontare lo studio elementare della formazione dei duomi, riferendoci alla fig. 3; se alla superficie di separazione dei due strati orizzontali indefiniti si applica una perturbazione rappresentata schematicamente da una protuberanza (del mezzo inferiore a densità minore) di sezione orizzontale circolare di raggio  $R$  e altezza  $\Delta$ , fino a che si considera il fenomeno puramente statico allora la viscosità dei mezzi non intervengono e tutto procede come si avesse a che fare con liquidi perfetti.

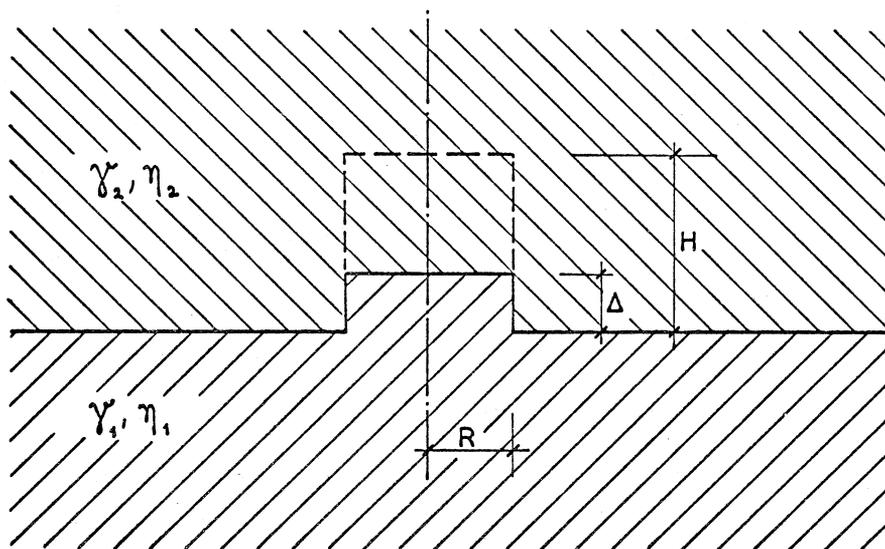


Fig. 3. - Schema di formazione di instabilità alla superficie di separazione di due mezzi diversi con  $\gamma_1 < \gamma_2$ .

In questo caso perché il moto (considerato al limite infinitamente lento) avvenga nel senso di aumentare l'altezza della perturbazione iniziale, deve essere, calcolando le pressioni in un punto della superficie deformata

$$(17) \quad p_1 > p_2$$

vale a dire, essendo:

$$(18) \quad \begin{cases} p_1 = \eta_2 h_2 - \gamma_1 \Delta \\ p_2 = \gamma_2 (h_2 - \Delta) \end{cases}$$

è anche:

$$(19) \quad \gamma_1 < \gamma_2$$

cioè effettivamente il mezzo a densità minore deve occupare lo strato inferiore perché la situazione sia instabile.

Nelle (18) ovviamente la quantità  $h_2$ , non indicata nel disegno, rappresenta lo spessore, indefinito, dello strato a indice 2.

Ma questo non ci dice nulla circa l'influenza della viscosità, per cui occorre ripetere il ragionamento in condizioni dinamiche, ritenendo il moto laminare ed escludendo, come già fatto per le equazioni generali, l'influenza dei termini di inerzia.

In attesa di realizzare un modello numerico che è in corso di programmazione e che dovrebbe fornire maggiori informazioni, vediamo di elaborare un semplice modello matematico che unitamente al modello fisico inverso possa dare altre indicazioni sul fenomeno della formazione dei duomi.

Lo schema utilizzato e che sembra il più verosimile, si deduce anche dall'osservazione del comportamento del duomo (situazione finale) realizzato nel modello inverso; in effetti la protuberanza, rivolta verso il basso, al passare del tempo, si appiattisce e si allarga; l'equazione del moto lungo l'asse verticale  $z$ , sotto semplici ipotesi, consente di giungere alla legge dello sviluppo dell'intrusione.

Occorre a questo punto dire qualcosa circa i motivi che ci hanno indotto ad abbandonare definitivamente i modelli di instabilità lineare basati sulle equazioni di Navier-Stokes e che pure sembravano talvolta dar ragione abbastanza bene della formazione e dello sviluppo dei duomi salini.

In effetti nel testo del Ramberg [7] vi è un'analisi teorica fondata sulle sopracitate equazioni, che porta ad uno sviluppo crescente esponenzialmente nel tempo; questo tipo di legge non si accorda assolutamente con i risultati ottenuti nel modello inverso sperimentale, e le digitazioni ed i filamenti mostrati nelle foto e nei rilievi dell'Autore alla superficie di separazioni di due fluidi, sono fenomeni ben noti ai cultori della fluidodinamica dei sistemi bifase, ma non possono in alcun caso essere scambiati per modelli di duomi salini, in quanto manca nel campo la condizione (8), vale a dire la condizione di scorrimento.

Questa relazione impone che il sistema, ove l'energia di deformazione sia inferiore ad una certa costante, si comporti come solido e non come liquido, mentre nel modello matematico usato dal Ramberg questo fenomeno essenziale non compare assolutamente.

Non è fatto cenno di questa condizione nemmeno nella pregevole Memoria del Daly [8] il quale ha ottenuto numericamente forme abbastanza simili ai duomi, studiando sempre l'instabilità interfacciale di due liquidi, cosa che in questo caso si giustifica pienamente, ma in effetti si tratta solo della formazione iniziale di digitazioni.

La condizione di scorrimento (8) è quella che sostanzialmente porta a concludere che il moto di liquido si ha «grosso modo» solo nel cilindro intruso, mentre al di fuori di esso, data l'esiguità delle tensioni interne, il sistema si comporta come un solido.

In effetti, il ragionamento che a questo punto verrebbe spontaneo, sarebbe di riprendere il discorso sull'instabilità, già visto in precedenza ed impostato su considerazioni statiche, trasferendolo nel campo dinamico.

Si dovrebbe scrivere allora

$$(20) \quad \sigma_z = p - 2\eta \frac{\partial w}{\partial z}$$

e considerando  $\sigma_z$  prima appartenente al liquido 1 e poi al liquido 2 e tenendo conto che le  $\sigma_z$  sulla superficie di separazione devono essere uguali, si giungerebbe alla:

$$(21) \quad p_2 - p_1 = 2(\eta_2 - \eta_1) \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ma essendo

$$(22) \quad \begin{cases} p_1 = \gamma_2 h_2 - \gamma_1 z \\ p_2 = \gamma_2 (h_2 - z) \end{cases}$$

la (21) diviene

$$(23) \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\alpha z \quad \left[ \alpha = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2(\eta_2 - \eta_1)} \right]$$

e quindi

$$(24) \quad w = -\frac{\alpha}{2} z^2$$

dovendosi assumere eguale a zero la costante di integrazione.

Ricordando ora che  $w \simeq \partial z / \partial t$  si ottiene una legge di variazione di  $z$  con  $t$ , del tipo

$$(25) \quad z = \frac{2}{\alpha(t+c)}$$

che tuttavia non si accorda assolutamente con i risultati del modello inverso avendo determinato  $\alpha$  con le costanti riportate più oltre.

Si è pertanto rivolta l'attenzione ad un modello schematico di cilindro liquido che penetra entro un altro liquido, e l'equazione elementare del moto lungo l'asse  $z$  diretta positivamente, verso l'alto, tenuto conto di una azione di tipo viscoso tangenziale alla parete del cilindro e di un'altra dello stesso tipo che resiste all'avanzare della sommità del cilindro, considerata come un disco che trasla in direzione normale al suo piano, si scrive, indicando con  $c_1$  e  $c_2$  due coefficienti da determinarsi mediante l'esperienza relativa al modello inverso:

$$(26) \quad \pi R^2 z (\gamma_2 - \gamma_1) - \pi R^2 \frac{dz}{dt} c_1 - 2 \pi R z \frac{dz}{dt} c_2 = 0.$$

L'equazione differenziale del moto si può quindi porre nella forma:

$$(27) \quad \frac{dz}{dt} \left( \frac{A}{z} + B \right) = 1$$

avendo conglobato in A e B tutti gli altri parametri.

L'integrazione della (27) è immediata e fornisce

$$(28) \quad A \ln z + Bz = t + c$$

con  $c$  costante da determinarsi con le condizioni ai limiti.

Questo per quanto riguarda il modello diretto: per il modello inverso invertendo il senso del vettore accelerazione di gravità, nella fig. 3, l'equazione (28) resta immutata salvo il cambiamento di segno di A e B, o che è lo stesso di  $t$ .

Studiamo anzitutto il modello inverso: dato che per  $t = 0$  deve aversi  $z = H$ , avendo indicato con  $H$  l'altezza del duomo salino al tempo  $T$ , pari all'altezza (profondità) iniziale del duomo nel modello inverso, otterremo

$$(29) \quad A \ln \frac{H}{z} + B(H - z) = t.$$

Determinando  $A$  e  $B$  in maniera che la (29) aderisca nel modo migliore ai dati sperimentali (per esempio imponendo che sia minimo lo scarto quadratico medio), si ottiene

$$(30) \quad \begin{cases} A = 1,5175 \cdot 10^{15} \text{ sec} \\ B = -3,988 \cdot 10^{11} \text{ sec m}^{-1}. \end{cases}$$

Ricordando che un milione di anni vale  $3,1536 \cdot 10^{13}$  secondi, si può scrivere la (29) in modo che il tempo venga espresso in milioni di anni

$$(31) \quad t = 48,12 \ln \frac{3750}{z} - 0,0126(3750 - z)$$

essendo 3750 m l'altezza attuale del duomo di Barbers Hill cui si riferisce il modello sperimentale.

A questo punto si presenta un fatto in certo qual modo sorprendente: vale a dire la comparsa del segno negativo per una costante, che, almeno a prima vista sembrerebbe un termine di resistenza. In effetti non è così: mentre la testa del cilindro schematizzato avanza incontrando una azione resistente di tipo viscoso (data la piccolezza dei numeri di Reynolds in gioco), la superficie laterale separa due mezzi che non si comportano, come nel caso del tubo, una da parete e l'altro da mezzo fluido, ma entrambi da fluidi, che avendo a contatto velocità eguali fanno sì che il mezzo esterno di maggior densità e maggior viscosità dinamica, possieda, almeno in un certo intorno, una maggior densità di energia.

Ne risulta quindi che il duomo salino subisce dall'esterno e lateralmente una sorta di azione di risucchio che si manifesta con effetti di « viscosità negativa » analogamente a molti altri casi studiati di recente in fenomeni atmosferici e di correnti marine.

Determinate con l'ausilio dell'esperienza le costanti  $A$  e  $B$  è immediato dalla (28) porre le condizioni ai limiti caratteristiche del moto diretto e scrivere l'equazione corrispondente.

Detta  $\Delta$  l'altezza iniziale della protuberanza salina, si ottiene, esprimendo sempre il tempo in milioni di anni:

$$(32) \quad t = 48,12 \ln \frac{z}{\Delta} - 0,0126(z - \Delta).$$

Si osserva dalla (32), che a partire da  $t = 0$ , in cui  $z = \Delta$ , il tempo aumenta all'aumentare di  $z$  denunciando l'instabilità del sistema fino che

ad un certo punto la curva assume tangente verticale, mostrando così che la curva perde di significato fisico.

In effetti si tenga presente che trattandosi di un fenomeno di instabilità, la velocità, e quindi lo spazio, tendono a crescere in maniera sempre più rapida e la velocità tende all'infinito; quindi il moto, come configurato dalle equazioni, non è più rappresentato dalle medesime.

La curva (31) è riportata anch'essa in fig. 2 accanto ai rilievi sperimentali di Supino, Scarpi e Montefusco e si può notare l'ottima aderenza dei due risultati; per quanto riguarda la valutazione del  $\Delta$  iniziale per cui si è innescato il fenomeno di formazione del duomo, riferendoci alla fig. 3, riportiamo i dati dei rilievi relativi al duomo di Barbers-Hill:

$$\gamma_1 = 2100 \text{ Kg m}^{-3}$$

$$\gamma_2 = 2600 \text{ Kg m}^{-3}$$

$$\gamma_{11} = 2 \cdot 10^{16} \text{ Kg sec m}^{-2}$$

$$\gamma_{12} = 10^{19} \text{ Kg sec m}^{-2}$$

$$R = 1250 \text{ m}$$

$$H = 3750 \text{ m}$$

mentre il tempo di formazione  $T$  è valutato dai geologi in 24 milioni di anni, pari a  $7,57 \cdot 10^{14}$  sec.

La sua altezza iniziale  $\Delta$ , detta  $\sigma_m$  la minima tensione interna nella massa calcarea capace di provocare lo scorrimento deve rispondere alla relazione fra ordini di grandezza

$$(30) \quad \Delta (\gamma_2 - \gamma_1) \simeq \sigma_m.$$

Ma posto che  $\sigma_m$  non può essere molto inferiore al carico unitario di rottura (la plasticizzazione infatti non può essere che immediatamente precedente) ed inoltre la imperfetta plasticità del calcare, mostrata anche dalla configurazione di fig. 1 che indica strati perforati, e non solo deformati, conduce ad assumere  $\sigma_m$  pari circa al più basso carico unitario di rottura che è quello alla trazione, che per un calcare medio vale  $\sim 60 \div 65 \text{ Kg/cm}^2$ .

Dalla (30) si ha allora

$$\Delta \simeq 1200 \div 1300 \text{ m}$$

e in corrispondenza la (27) fornisce il tempo  $T$  di formazione del duomo:

$$T \simeq 22,58 \div 19,97 \quad (\text{milioni di anni})$$

in ottimo accordo con il tempo stimato dai geologi, se si tiene conto del tipo di schematizzazione adottato e delle approssimazioni insite nel calcolo.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] C. SOMIGLIANA (1931) – *Sulla teoria del movimento glaciale*, « Bollettino Comitato Glaciologico Italiano », II.
- [2] M. KING HUBBERT (1937) – *Theory of scale models as applied in the study of geologic structures*, « Bull. of Geol. Soc. of America », 48.
- [3] M. KING HUBBERT (1945) – *Strenght of the earth*, « Bull. Am. Assoc. of Petroleum Geologist », 29.
- [4] G. SUPINO (1964) – *Sopra la possibilità di modelli geologici*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », dicembre 1964. Note I e II.
- [5] L. MONTEFUSCO, G. SCARPI e G. SUPINO (1971) – *Un esempio di modello geologico*, « Rend. Acc. Naz. Lincei ».
- [6] J. C. JAEGER e N. G. W. COOK (1969) – *Fundamentals of rock mechanics*, Methuen, London.
- [7] H. RAMBERG (1967) – *Gravity, deformation and the earth's crust, as studied by centrifuged models*, Academic Press, London-N.U.Y.
- [8] B. J. DALY (1969) – *Numerical study of the effect of surface tension on interface instability*, « The physics of fluids », 12 (7).