Silvio Greco

Seminormalità delle varietà di Gorenstein

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.4, p. 556–558.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_4_556_0>

Geometria algebrica. — *Seminormalità delle varietà di Gorenstein.*
Nota di SILVIO GRECO (*), presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We characterize those Gorenstein algebraic varieties which are seminormal (in the sense of [11]), by describing their singularities in codimension 1. In particular a plane curve is seminormal if, and only if, it has at most ordinary double points (as proved by P. Salmon in [10]); and a surface in 3-space is seminormal if, and only if, it has at most "biplanar" double curves. It follows that a surface with "ordinary singularities" only is seminormal, as proved by E. Bombieri in [5].

1. INTRODUZIONE

La nozione di *seminormalità* è stata introdotta da Endo [6] per studiare l'omomorfismo canonico Pic (A) $\rightarrow$ Pic (A [T]), e da Andreotti–Norguét [2] per ottenere il «migliore» spazio analitico omeomorfo ad uno dato. Lungo la linea di Endo hanno lavorato vari Autori, tra cui Bass–Murthy [4], Salmon [10], Pedrini [9]; mentre l'idea di Andreotti–Norguét è stata sviluppata da Andreotti–Bombieri [1] e da Traverso in [11] dove si dimostra, tra l'altro, la sostanziale equivalenza dei due punti di vista.

In questa Nota diamo una simultanea generalizzazione di due risultati contenuti in [10] e [5]. Nel primo di questi lavori, Salmon dimostra che una curva piana è seminormale se, e soltanto se, ha al più punti doppi ordinari; mentre, nel secondo Bombieri, dimostra che una superficie dello spazio a tre dimensioni avente solo singolarità ordinarie è seminormale. Questi risultati rientrano infatti nel successivo Teor. 2, in cui si caratterizzano le varietà algebriche di Gorenstein (in particolare le intersezioni complete) mediante le loro singolarità in codimensione 1. Il Teor. 2 è in sostanza la traduzione geometrica di una caratterizzazione degli anelli di Gorenstein seminormali, basata su di una nota uguaglianza di Apery–Samuel–Gorenstein valida per anelli locali di Gorenstein uno–dimensionali (Teor. 1).

Le dimostrazioni vengon qui appena accennate, e appariranno in dettaglio in un successivo lavoro.

I risultati di questa Nota sono già stati esposti in una conferenza tenuta a Padova il 4 marzo 1972, e in un ciclo di seminari tenuti a Genova nella primavera del 1972.

2. SEMINORMALITÀ DEGLI ANELLI DI GORENSTEIN

Siano A un anello commutativo noetheriano ridotto e A′ la chiusura integrale di A nel suo anello totale di frazioni. Supponiamo che A′ sia un A–modulo finitamente generato.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Nella seduta del 12 aprile 1975.

DEFINIZIONE 1 (cfr. [11]). La *seminormalizzazione* di A è l'anello

$$A^+ = \{f \in A' \mid f_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p} + \mathrm{rad}\, A'_\mathfrak{p} \text{ per ogni } \mathfrak{p} \in \mathrm{spec}\,(A)\}$$

(qui $f_\mathfrak{p}$ denota l'immagine di f in $A'_\mathfrak{p}$). Se $A = A^+$ si dice che A è *seminormale* (abbreviato: SN).

OSSERVAZIONE 1. La definizione precedente risulta equivalente a quella data in [1] soltanto in caratteristica zero. Inoltre, in [11] si dimostra che A, è SN se, e solo se, Pic (A) = Pic (A [T]). Per il significato geometrico della Definizione 1 si rinvia a [1].

TEOREMA 1. *Sia* A *un anello ridotto di Gorenstein* (1), *e supponiamo che la chiusura* A' *di* A *nel suo anello totale di frazioni sia un* A*–modulo finitamente generato. Allora le seguenti condizioni* (a), (b) *sono equivalenti e implicano* (c):

(a) A è SN;

(b) A_p *è* SN *per ogni* $p \in \mathrm{Spec}\,(A)$ *di altezza* 1;

(c) *per ogni* $\mathfrak{p}$, *come in* (b), *l'anello* $A' \otimes_A k(\mathfrak{p})$ *è ridotto e ha dimensione* ≤ 2 *quale* $k(\mathfrak{p})$*–spazio vettoriale.*

Dimostrazione (cenno). L'equivalenza di (a) e (b) è una conseguenza della sola proprietà S_2 (cfr. [8]), e si può dimostrare con semplici considerazioni sui primi associati all'A–modulo A'/A (oppure combinando dei risultati di [4] e [11]).

L'implicazione (c) → (b) si dimostra applicando agli anelli locali di Gorenstein uno–dimensionali $A_\mathfrak{p}$ l'uguaglianza di Apery–Samuel–Gorenstein (cfr. [3]).

3. APPLICAZIONI GEOMETRICHE

Siano k un corpo algebricamente chiuso, $V \subset k^n$ una varietà, A l'anello delle coordinate di V. Diremo che V è SN (o di Gorenstein) se A è un anello SN (o di Gorenstein). È noto che una completa intersezione (in particolare una ipersuperficie) è sempre di Gorenstein (cfr. [3] o [7]).

Supponiamo inoltre che V sia ridotta (cioè: A è ridotto), e denotiamo con V' la normalizzazione di V, e con f il morfismo canonico $V' \to V$ (corrispondente all'immersione $A \to A'$).

THEOREMA 2. *Sia* V *una varietà di Gorenstein ridotta. Allora le seguenti condizioni* (a), (c) *sono equivalenti e implicano* (b):

(*a*) V è SN_r

(b) *se* W *è una sottovarietà singolare irriducibile di codimensione* 1 *di* V *si ha*:

(*b*1) f^{-1}(W) *è irriducibile e* $f : f^{-1}(W) \to W$ *ha grado* 2, *oppure*

(*b*2) f^{-1}(W) *ha esattamente due componenti irriducibili canonicamente birazionale a* W;

(1) Cfr. [3], oppure [7], per la definizione e le principali proprietà di tali anelli.

(*c*) *se* W *è come sopra*, $\mathfrak{p}$ *è l'ideale di* W *in* A *e* $K = k(\mathfrak{p})$, *si ha*:

(*c*1) $(A_{\mathfrak{p}})^{\wedge} = K[[X, Y]]/(XY)$, *oppure*

(*c*2) $(A_{\mathfrak{p}})^{\wedge} = K[[X, Y]]/(X^2 - u^2 Y^2)$, *con* $u \notin K$;

Se inoltre la caratteristica di k è diversa da 2, le condizioni (a), (c) *sono equivalenti a*:

(*d*) *se* W *è come sopra*, W *è* (*esattamente*) *doppia e il cono tangente a* V *nel punto generico di* W *è spezzato in due varietà lineari distinte*.

Dimostrazione (cenno). La (b) è equivalente alla (c) del Teor. 1. L'equivalenza tra (a) e (c) segue dalla regolarità delle fibre formali di $A_{\mathfrak{p}}$ (cfr. [8]); mentre l'equivalenza tra (c) e (d) segue da considerazioni sull'anello graduato associato ad $A_{\mathfrak{p}}$.

COROLLARIO 1 (cfr. [10]). *Una curva piana è SN se e soltanto se, essa ammette al più punti doppi nodali.*

COROLLARIO 2. *Una superficie di* k^3 (*con* car $(k) \neq 2$) *è* SN *se, e soltanto se, essa possiede come singolari al più delle curve doppie biplanari.*

COROLLARIO 3 (cfr. [5]). *Una superficie dello spazio a tre dimensioni avente al più singolarità ordinarie è seminormale.*

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREOTTI A. e BOMBIERI E. (1969) – *Sugli omeomorfismi delle varietà algebriche*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », *23*, 430–450.

[2] ANDREOTTI A. e NORGUET F. (1967) – *La convexité holomorphe dans l'espace des cycles d'une varieté algebrique*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », *21*, 31–82.

[3] BASS H. (1963) – *On the ubiquity of Gorenstein rings*, « Math. Z. », *82*, 8–28.

[4] BASS H. e MURTHY M. P. (1967) – *Grothendieck groups and Picard groups of abelian group rings*, « Ann. of Math. », *86*, 16–73.

[5] BOMBIERI E. (1973) – *Seminormalità e singolarità ordinarie*, « Symp. Math. », *11*, 205–210.

[6] ENDO S. (1963) – *Projective modules over polynomial rings*, « J. Math. Soc. Japan », *15*, 339–352.

[7] GRECO S. (1969) – *Anelli di Gorenstein*, Pubbl. Ist. Mat. Univ. Genova.

[8] MATSUMURA H. (1970) – *Commutative Algebra*, Benjamin Inc., New York.

[9] PEDRINI C. (1971) – *Sul gruppo di Picard di certe estensioni di anelli di gruppo 1-dimensionali*, « Rend. di Mat. », Serie VI (1), 1–18.

[10] SALMON P. (1969) – *Singolarità e gruppo di Picard*, « Symp. Math. », *2*, 341–345.

[11] TRAVERSO C. (1970) – *Seminormality and Picard group*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », *24*, 385–395.