
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARCO BIROLI

**Sur la dépendance du convexe de la solution du
problème de Cauchy pour un'inéquation parabolique
avec convexe dépendant du temps. Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 58 (1975), n.4, p. 508–514.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_4_508_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sur la dépendance du convexe de la solution du problème de Cauchy pour un'inéquation parabolique avec convexe dépendant du temps.* Nota II di MARCO BIROLI (*), presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dimostra il Teorema I enunciato nella Nota I.

§ 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I

Démontrons d'abord le résultat dans le cas $u_{0n} \in K_n(o)$, $u_0 \in K(o)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty}^* u_{0n} = u_0$ dans V . De [2] on a que le problème (I, 7_n) a une solution $u_n(t)$.

Nous observons, [3], qu'il y a une section $w_n(t)$ de $K_n(t)$ avec $w_n(o) = u_{0n}$ et $\|w'_n(t)\| \leq g(t)$ p.p. sur $[o, T]$; en posant dans (I, 7_n) $v(t) = w_n(t)$, on a alors

$$(3,1) \quad \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt \leq C_1.$$

De (3,1) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$(3,2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}^* u_n(t) = u(t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^p(o, T; V).$$

Définissons $u_{n,n}(t)$ par le problème

$$(3,3) \quad \begin{aligned} & \langle \eta(u'_{n,n}(t) + c J_p u_{n,n}(t)) + u_{n,n}(t) - u(t), v - u_{n,n}(t) \rangle \geq 0 \quad \text{p.p. } [o, T] \\ & \forall v \in K_n(t), \quad u_{n,n}(t) \in K_n(t) \quad \text{p.p. sur } [o, T], \quad u_{n,n}(o) = u_{0n} \end{aligned}$$

où $\eta, c > 0$; du Lemme 3 on a

$$(3,4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n,n}(t) = u_n(t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^p(o, T; V) \cap C(o, T; H)$$

$$(3,5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}^* u'_{n,n}(t) = u'_n(t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^2(o, T; H)$$

où $u_n(t)$ est solution du problème

$$(3,6) \quad \begin{aligned} & \langle \eta(u'_n(t) + c J_p u_n(t)) + u_n(t) - u(t), v - u_n(t) \rangle \geq 0 \quad \text{p.p. sur } [o, T] \\ & \forall v \in K(t), \quad u_n(t) \in K(t) \quad \text{p.p. sur } [o, T], \quad u_n(o) = u_0. \end{aligned}$$

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Parma ed Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1975.

De (1,7_n) on a

$$\begin{aligned}
 (3,7) \quad & \int_0^t \langle A(t) u_n(t), u_n(t) - u_{n,n}(t) \rangle dt + \\
 & + c \int_0^t \langle J_p u_{n,n}(t), u_{n,n}(t) - u_n(t) \rangle dt + \frac{1}{2} \|u_{n,n}(t) - u_n(t)\|^2 \leq \\
 & \leq \int_0^t \langle u'_{n,n}(t) + c J_p u_{n,n}(t), u_{n,n}(t) - u_n(t) \rangle dt - \\
 & - \int_0^t \langle f(t), u_{n,n}(t) - u_n(t) \rangle dt \leq \frac{1}{\eta} \int_0^t \langle u(t) - u_{n,n}(t), u_{n,n}(t) - \\
 & - u_n(t) \rangle dt + \int_0^t \langle f(t), u_{n,n}(t) - u_n(t) \rangle dt.
 \end{aligned}$$

Passons maintenant à la limite pour $n \rightarrow \infty$ et η fixé; on a

$$\begin{aligned}
 (3,8) \quad & \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \langle A(t) u_n(t), u_n(t) - u_n(t) \rangle dt + \\
 & + c \int_0^t \langle J_p u_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle dt + \\
 & + \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t) - u_n(t)\|^2 \leq - \int_0^t \langle f(t), u_n(t) - u(t) \rangle dt.
 \end{aligned}$$

De (3,1) (3,8) on a

$$(3,9) \quad \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt \leq C_2.$$

On sait de [2]

$$(3,10) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^2(0, T; H).$$

De (3,9) (3,10) on a alors

$$(3,11) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0}^* u_n(t) = u(t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^p(0, T; V).$$

De (3,2) on peut aussi supposer, sans perdre de généralité,

$$(3,12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}^* A(t) u_n(t) = \chi(t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^p(0, T; V).$$

De (3,8) on a

$$\begin{aligned}
 (3,13) \quad & \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \langle A(t) u_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle dt + \\
 & + c \int_0^t \langle J_p u_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle dt + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} |u_n(t) - u(t)|^2 \leq \\
 & \leq \int_0^t \langle \chi(t) - f(t), u_n(t) - u(t) \rangle dt + \frac{1}{2} |u_n(t) - u(t)|^2
 \end{aligned}$$

dont on a

$$(3,14) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \langle A(t) u_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle dt \leq 0$$

pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$(3,15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^2(0, T; H)$$

$$(3,16) \quad \lim_{n \rightarrow 0} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^p(0, T; V).$$

De (3,2) (3,15) on a par le même procédé utilisé dans le Lemme 3

$$(3,17) \quad u(t) \in K(t) \quad \text{p.p. sur } [0, T].$$

De (3,14) on a aussi $\forall v(t) \in \mathcal{L}^p(0, T; V)$

$$\begin{aligned}
 (3,18) \quad & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \langle A(t) u_n(t), v(t) - u_n(t) \rangle dt \geq \\
 & \geq \int_{t_1}^{t_2} \langle A(t) u(t), v(t) - u(t) \rangle dt.
 \end{aligned}$$

pour presque tout $t_1, t_2 \in [0, T]$ avec $t_1 \leq t_2$.

On a alors, du Lemme 3,

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + A(t) u(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle dt \geq \frac{1}{2} |v(t_2) - u(t_2)|^2 -$$

$$- \frac{1}{2} |v(t_1) - u(t_1)|^2 \quad \text{pour presque tout } t_1, t_2 \in [0, T], t_1 \leq t_2, v(t) \in E.$$

En posant $v(t) = u_n(t)$ on a alors comme dans [2]

$$\lim_{n \rightarrow 0} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans } C(0, T; H).$$

On peut alors affirmer que $u(t)$ est solution de (2,18) et donc est solution de (1,7).

Notre but est maintenant de démontrer que

$$(3,19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans } C(0, T; H).$$

Nous observons qu'on a

$$(3,20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{K_n(t)} u(t) = u(t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^p(0, T; V).$$

Considérons les fonctions $\tilde{u}_{\eta,n}(t)$ définies par les problèmes

$$\begin{aligned} \langle \eta(\tilde{u}'_{\eta,n}(t) + c J_p \tilde{u}_{\eta,n}(t)) + \tilde{u}_{\eta,n}(t) - P_{K_n(t)} u(t), v - \tilde{u}_{\eta,n}(t) \rangle &\geq 0 \quad \text{p.p. sur } [0, T] \\ \forall v \in K_n(t) \quad , \quad \tilde{u}_{\eta,n}(t) \in K_n(t) \quad \text{p.p. sur } [0, T] \quad , \quad \tilde{u}_{\eta,n}(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Du Lemme 3 on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_{\eta,n}(t) = u_\eta(t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^p(0, T; V) \cap C(0, T; H)$$

et de la partie précédente de la démonstration on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_\eta(t) = u(t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^p(0, T; V) \cap C(0, T; H).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et fixons $\bar{\eta}$ tel que

$$\begin{aligned} \|u_{\bar{\eta}}(t) - u(t)\|_{\mathcal{L}^p(0, T; V)} &\leq \varepsilon \\ \|u_{\bar{\eta}}(t) - u(t)\|_{C(0, T; H)} &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} (3,21) \quad \frac{1}{2} \|\tilde{u}_{\bar{\eta},n}(t) - u_n(t)\|^2 &\leq \int_0^t \langle \tilde{u}'_{\bar{\eta},n}(s) + A(s) u_n(s) - \\ &- f(s), \tilde{u}_{\bar{\eta},n}(s) - u_n(s) \rangle ds \leq \int_0^t \langle \tilde{u}'_{\bar{\eta},n}(s), P_{K_n(s)} u(s) - u_n(s) \rangle ds + \\ &+ \int_0^t \langle \tilde{u}'_{\bar{\eta},n}(s), \tilde{u}_{\bar{\eta},n}(s) - P_{K_n(s)} u(s) \rangle ds + \int_0^t \langle A(s) u_n(s) - \\ &- f(s), \tilde{u}_{\bar{\eta},n}(s) - u_n(s) \rangle ds + \int_0^t \langle A(s) u_n(s) - f(s), u_{\bar{\eta}}(s) - \\ &- u(s) \rangle ds + \int_0^t \langle A(s) u(s) - f(s), u(s) - u_n(s) \rangle ds \leq \\ &\leq \int_0^t \langle \tilde{u}'_{\bar{\eta},n}(s), P_{K_n(s)} u(s) - u_n(s) \rangle ds - c \int_0^t \langle J_p \tilde{u}_{\bar{\eta},n}(s), \tilde{u}_{\bar{\eta},n}(s) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - P_{K_n(s)} u(s) \rangle ds + \int_0^t \langle A(s) u_n(s) - f(s), \tilde{u}_{\bar{n},n}(s) - u_{\bar{n}}(s) \rangle ds + \\
& + \int_0^t \langle A(s) u_n(s) - f(s), u_{\bar{n}}(s) - u(s) \rangle ds + \\
& + \int_0^t \langle A(s) u(s) - f(s), u(s) - u_n(s) \rangle ds.
\end{aligned}$$

Étant

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle J_p \tilde{u}_{\bar{n},n}(s), \tilde{u}_{\bar{n},n}(s) - P_{K_n(s)} u(s) \rangle \leq 0,$$

on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle J_p \tilde{u}_{\bar{n},n}(s), \tilde{u}_{\bar{n},n}(s) - P_{K_n(s)} u(s) \rangle \leq \varepsilon.$$

De (3,21) on a alors que pour $n \geq n_{\varepsilon, \bar{n}}$

$$|\tilde{u}_{\bar{n},n}(t) - u_n(t)| \leq C\varepsilon$$

où C est une constante qui ne dépende pas de n .

Pour $n \geq n(\varepsilon, \bar{n})$ on a alors

$$|u(t) - u_n(t)| \leq |u(t) - u_{\bar{n}}(t)| + |u_{\bar{n}}(t) - \tilde{u}_{\bar{n},n}(t)| + |\tilde{u}_{\bar{n},n}(t) - u_n(t)| \leq C' \varepsilon$$

où C' est une constante qui ne dépende pas de n , dont

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans } C(0, T; H).$$

Passons maintenant au cas général.

Indiquons par $u_n(t)$ les solutions de (1,7_n) et par $u(t)$ la solution de (1,7); étant $u_0 \in \overline{K(0)}^H$, $\forall \varepsilon > 0$, il y a $\bar{u} \in K(0)$ tel que

$$|u_0 - \bar{u}| \leq \varepsilon.$$

Indiquons par $\bar{u}(t)$ la solution de (1,7) avec donnée initiale $\bar{u}$; on a [2]

$$|u(t) - \bar{u}(t)| \leq \varepsilon.$$

Étant $\bar{u} \in K(0)$ il y a une suite $\{\bar{u}_n\}$ avec $\bar{u}_n \in K_n(0)$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n = \bar{u} \quad \text{dans } V.$$

On peut alors choisir n_ε , tel que pour $n \geq n_\varepsilon$

$$|\bar{u}_n(t) - \bar{u}(t)| \leq \varepsilon \quad \text{sur } [0, T]$$

où $\bar{u}_n(t)$ est la solution de (1,7_n) avec donnée initiale $\bar{u}_n$; on a alors

$$|\bar{u}_n - u_{0n}| \leq |u_0 - u_{0n}| + |u_0 - \bar{u}| + |\bar{u} - \bar{u}_n|.$$

On peut supposer, sans perdre de généralité,

$$|u_0 - u_{0n}| \leq \varepsilon \quad \text{pour } n \geq n_\varepsilon$$

donc

$$|\bar{u}_n - u_{0n}| \leq 3\varepsilon \quad \text{pour } n \geq n_\varepsilon$$

dont, [2],

$$|\bar{u}_n(t) - u_n(t)| \leq 3\varepsilon.$$

On a alors pour $n \geq n_\varepsilon$

$$|u(t) - u_n(t)| \leq 5\varepsilon$$

dont

$$(3,22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans } C(0, T; H).$$

Considérons maintenant $(1,7_n)$; il est facile de démontrer que

$$(3,23) \quad \int_0^T \|u_n(t)\|^p dt \leq Cst$$

dont on a, compte tenu de (3,22),

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^* u_n(t) = u(t) \quad \text{dans } \mathcal{L}^p(0, T; V).$$

Le résultat est ainsi démontré.

§ 4. UN EXEMPLE D'APPLICATION DU THÉORÈME I

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ de frontière régulière Γ , $V = H^1(\Omega)$, $H = \mathcal{L}^2(\Omega)$, $A: V \rightarrow V^*$ l'opérateur défini par la relation

$$(Au, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) dx$$

où $u, v \in H^2(\Omega)$ et $a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$

$$\alpha > 0, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n, x \in \Omega, \quad a_{ij}(x) \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Posons

$$K_n(t) = \{v \mid v \in V, v \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega, \quad v \geq \psi_n(t, x) \quad \text{p.p. sur } \Gamma\}$$

$$K(t) = \{v \mid v \in V, v \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega, \quad v \geq \psi(t, x) \quad \text{p.p. sur } \Gamma\}$$

où $\psi_n(t, x), \psi(t, x) \in \mathcal{L}^2(0, T; H^1(\Omega))$ et ont une variation négative avec dérivée dans $\mathcal{L}^2(0, T; H^1(\Omega))$ et bornée dans la norme de $H^1(\Omega)$ par $g(t) \in \mathcal{L}^p(0, T)$ p.p. sur $[0, T]$.

Nous supposons aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t, x) = \psi(t, x) \quad \text{dans } H^1(\Omega)$$

p.p. sur $[0, T]$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(0, x) = \psi(0, x) \quad \text{dans } H^1(\Omega).$$

Soient enfin $u_0(x), u_{0n}(x) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ non negatives avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{0n}(x) = u_0(x) \quad \text{dans } \mathcal{L}^2(\Omega)$$

et $f(t) \in \mathcal{L}^2(0, T; V^*)$; il est facile de vérifier que dans ce cas les hypothèses du Théorème 1 sont satisfaites.

On peut enfin observer que si $f(t) \in \mathcal{L}^1(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$ les problèmes (1,7_n) (1,7) sont formellement équivalentes au problèmes

$$(4,1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - Au(t, x) - f(t, x) &\geq 0 && \text{p.p. sur } [0, T] \times \Omega \\ u(t, x) &\geq 0 && \text{p.p. sur } [0, T] \times \Omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - Au(t, x) - f(t, x) \right) \cdot u(t, x) &= 0 \\ &\text{p.p. sur } [0, T] \times \Omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}(t, x) &= 0 && \text{p.p. sur } [0, T] \times \Gamma \quad \text{où } u(t, x) > \psi_n(t, x) \\ u(t, x) &= \psi_n(t, x) && \text{p.p. ailleurs sur } [0, T] \times \Gamma. \end{aligned}$$

$$(4,2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - Au(t, x) - f(t, x) &\geq 0 && \text{p.p. sur } [0, T] \times \Omega \\ u(t, x) &\geq 0 && \text{p.p. sur } [0, T] \times \Omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - Au(t, x) - f(t, x) \right) \cdot u(t, x) &= 0 \\ &\text{p.p. sur } [0, T] \times \Omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}(t, x) &= 0 && \text{p.p. sur } [0, T] \times \Gamma \quad \text{où } u(t, x) > \psi(t, x) \\ u(t, x) &= \psi(t, x) && \text{p.p. ailleurs sur } [0, T] \times \Gamma \end{aligned}$$

où n indique la normale à Γ extérieure à Ω .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BIROLI (1969) - *Sulle diseguglianze d'evoluzione: teoremi di dipendenza continua*, « Rend. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », 103, 1027-1051.
- [2] M. BIROLI (1974) - *Sur les inéquations paraboliques avec convexe dépendant du temps: solution forte et solution faible*. A paraître, « Rend. Univ. Parma ».
- [3] J. J. MOREAU (1972) - *Retraction d'une multiapplication*. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, Exposé, 13, 89.
- [4] U. MOSCO (1957) - *Approximation of solution of variational inequalities*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », 20, 373-393.
- [5] U. MOSCO (1969) - *Convergence of solution of variational inequalities. Theory and application of monotone operators*. Oderisi-Gubbio.