
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ANNA LUISA GILOTTI

**Sui gruppi finiti in cui classi distinte di elementi
coniugati hanno diversa cardinalità**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 58 (1975), n.4, p. 501–507.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_4_501_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Teoria dei gruppi. — *Sui gruppi finiti in cui classi distinte di elementi coniugati hanno diversa cardinalità.* Nota di ANNA LUISA GILOTTI (*), presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Let G be a finite group of order $p^\alpha q^\beta$ (p and q different primes) such that no different conjugacy classes of G have the same cardinality. Then G is the symmetric group on three letters.

1. Sia G un gruppo finito e sia

$$G = C_0 \cup C_1 \cdots C_r$$

$C_0 = \{1\}$, $|C_0| \leq |C_1| \leq \cdots \leq |C_r|$, la decomposizione di G in classi complete di elementi coniugati.

Consideriamo i gruppi finiti G per cui vale la seguente proprietà:

$$(1.1) \quad 1 = |C_0| < |C_1| < \cdots < |C_r|.$$

Se indichiamo con g_i un rappresentante della classe C_i , $i = 0, 1, \dots, r$; la proprietà (1.1) è equivalente alla seguente:

$$(1.2) \quad |G| = |G_G(g_0)| > |G_G(g_1)| > \cdots > |G_G(g_r)|.$$

In [2] F.M. Markel ha dimostrato che l'unico gruppo G , a derivato nilpotente, che soddisfa (1.1) è il gruppo simmetrico su tre oggetti S_3 .

In questa Nota dimostreremo che l'unico gruppo di ordine $p^\alpha q^\beta$ (p, q primi distinti; α e β interi positivi) verificante la (1.1) è S_3 .

Un gruppo G viene detto razionale se, dato un qualunque elemento g di G , ed un intero positivo m primo con l'ordine di g , g e g^m sono coniugati in G .

È chiaro che tale proprietà è vera se e solo se ogni carattere complesso di G è a valori razionali, di qui la denominazione razionale. Si vede facilmente che se un gruppo gode della proprietà (1.1) allora è razionale.

Nel suo lavoro F.M. Markel fornisce alcune caratterizzazioni concernenti i gruppi razionali, che riportiamo per comodità:

PROPOSIZIONE 1.1. *Se G è un gruppo razionale e H è un sottogruppo normale di G , G/H è un gruppo razionale.*

PROPOSIZIONE 1.2. *Il numero primo 2 divide l'ordine di un qualsiasi gruppo razionale non identico.*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 aprile 1975.

PROPOSIZIONE 1.3. *Se G è un gruppo razionale e S è un suo 2-sottogruppo di Sylow, allora il centralizzante di S in G coincide con il centro di S ed è un 2-gruppo abeliano elementare.*

PROPOSIZIONE 1.4. *Se G è nilpotente razionale, G è un 2-gruppo.*

PROPOSIZIONE 1.5. *Se G è abeliano razionale, G è un 2-gruppo abeliano elementare.*

2. Supponiamo che G sia un gruppo finito godente della proprietà (1.1).

Si vede subito che il centro $Z(G)$ di G deve essere identico, essendo ogni elemento di $Z(G)$ coniugato solo di se stesso.

Un'altra immediata conseguenza della razionalità di G è la seguente: per ogni elemento g di G , il gruppo fattoriale $N_G(g)/C_G(g)$ ⁽¹⁾ è isomorfo a tutto il gruppo degli automorfismi di $\langle g \rangle$.

PROPOSIZIONE 2.1. *Se G è un gruppo razionale e G' indica il derivato di G , il gruppo fattoriale G/G' è un 2-gruppo abeliano elementare.*

Dimostrazione. La dimostrazione della Proposizione 2.1 discende immediatamente dalle proposizioni 1.1 e 1.5.

TEOREMA 2.2. *Se G è un gruppo di ordine $p^\alpha q^\beta$ (p e q primi distinti, α e β interi positivi) soddisfacente la proprietà (1.1), allora G è isomorfo al gruppo simmetrico su tre oggetti S_3 .*

Dimostrazione. Poiché G è razionale, per la Proposizione 1.2 l'ordine di G è $p^\alpha 2^\beta$.

Si ha $|G| = \sum_{i=0}^r |C_i|$, dove C_i , $i = 0, 1, \dots, r$, sono le classi complete di elementi coniugati di G ; inoltre $|C_i|$ per ogni $i = 0, 1, \dots, r$ è un divisore dell'ordine di G , ed è $|C_i| \neq |C_j|$ per ogni i, j , $i \neq j$.

La somma di tutti i divisori distinti dell'ordine di G , compresa l'unità e $|G|$ stesso è data dall'espressione:

$$\frac{1}{p-1} (p^{\alpha+1} - 1) (2^{\beta+1} - 1).$$

Dovendo G soddisfare (1.1) sarà allora:

$$(2.1) \quad \frac{1}{p-1} (p^{\alpha+1} - 1) (2^{\beta+1} - 1) - p^\alpha 2^\beta \geq p^\alpha 2^\beta = G.$$

Cioè $|G| = p^\alpha 2^\beta$ è un numero perfetto o abbondante.

Supponiamo dapprima $\beta = 1$.

Per un noto Teorema di Burnside, G è risolubile onde $G' \neq G$, e quindi in base alla Proposizione 2.1 $|G'| = p^\alpha$, cioè G è a derivato nilpotente.

(1) Indichiamo con $N_G(g)$ il normalizzante di $\langle g \rangle$, e con $\langle g \rangle$ il sottogruppo generato da g .

Per i risultati di Markel citati in 1, ciò implica

$$|G'| = 3 \text{ e } G \cong S_3.$$

Possiamo pertanto supporre $\beta > 1$.

Dimosteremo dapprima che $p = 3$.

Supponiamo $\alpha = 1$.

L'ordine di G è quindi $p \cdot 2^\beta$ con $\beta > 1$.

In G non possono esistere classi complete di elementi coniugati di ordine $p \cdot 2^{\beta-1}$. Infatti se g fosse un elemento appartenente alla classe C contenente $p \cdot 2^{\beta-1}$ elementi, si avrebbe $|C_G(g)| = 2$. Ma poiché abbiamo supposto $\beta > 1$, il sottogruppo generato da g è necessariamente contenuto in un sottogruppo di G di ordine 4, che è abeliano e che pertanto è contenuto nel centralizzante di g .

Sussiste quindi la disuguaglianza che si ottiene dalla (2.1) sottraendo al primo membro della stessa il termine $p \cdot 2^{\beta-1}$ che non rappresenta l'indice di nessun centralizzante in G . Si ha allora:

$$(p+1)(2^{\beta+1}-1) - 2 \cdot p^\beta - 2 \cdot p^{\beta-1} \geq p \cdot 2^\beta$$

da cui si ha:

$$(4-p)2^{\beta+1} - p - 1 \geq 0.$$

Se p fosse un primo maggiore di 3 la disuguaglianza precedente non sarebbe vera; pertanto dobbiamo supporre $p = 3$.

Sia ora $\alpha > 1$.

Per un ragionamento analogo a quello fatto nel caso precedente sussiste la disuguaglianza che si ottiene dalla (2.1) sottraendo al primo membro i termini $p^{\alpha-1} \cdot 2^\beta$ e $p^\alpha \cdot 2^{\beta-1}$ che non sono indici di alcun centralizzante in G .

Si ha allora:

$$(2.2) \quad \frac{1}{p-1} (p^{\alpha+1}-1)(2^{\beta+1}-1) - p^\alpha \cdot 2^\beta - p^{\alpha-1} \cdot 2^\beta - p^\alpha \cdot 2^{\beta-1} \geq p^\alpha \cdot 2^\beta$$

da cui:

$$2^{\beta-1} (3p^\alpha + 2p^{\alpha-1}) - p^{\alpha+1} \cdot 2^{\beta-1} - p^{\alpha+1} - 2^{\beta+1} + 1 \geq 0.$$

Se p fosse un primo maggiore di 3

$$2^{\beta-1} (3p^\alpha + 2p^{\alpha-1}) < 4 \cdot 2^{\beta-1} \cdot p^\alpha \leq p^{\alpha+1} \cdot 2^{\beta-1}.$$

Cioè sarebbe $2^{\beta-1} (3p^\alpha + 2p^{\alpha+1}) - p^{\alpha+1} \cdot 2^{\beta-1} < 0$

e la disuguaglianza (2.2) non sarebbe verificata.

Quindi anche in questo caso dovrà essere $p = 3$.

Rimangono perciò da studiare i casi:

$$(a) \quad G = 3 \cdot 2^\beta, \quad \beta > 1$$

$$(b) \quad G = 3^\alpha \cdot 2^\beta, \quad \alpha, \beta > 1.$$

Dimostreremo che ambedue i casi (a) e (b) non forniscono gruppi godenti della proprietà (1.1), da cui discende che è assurdo supporre $\beta > 1$.

Consideriamo il caso (a).

Sia S un 2-sottogruppo di Sylow del gruppo G di ordine $3 \cdot 2^\beta$. S non è normale in G per la Proposizione 2.1, onde i coniugati di S in G sono in numero di 3: $S_0 = S, S_1, S_2$.

L'indice di $S_0 \cap S_1$ in S_0 non può superare l'indice di S_1 in G , cioè è ≤ 3 . Poiché S è un 2-gruppo è $[S_0 : S_0 \cap S_1] = 2$.

Analogamente $[S_1 : S_0 \cap S_1] = 2$, onde $S_0 \cap S_1$ è normale in S_0 ed S_1 , quindi anche in $\langle S_0, S_1 \rangle = G$.

Posto $M = S_0 \cap S_1$, ne deriva che $[G : M] = 6$, cioè l'ordine di M è $2^{\beta-1}$.

Pertanto il numero degli elementi di G di periodo potenza di 2 è $3(2^\beta - 2^{\beta-1}) + 2^{\beta-1} = 2^{\beta+1}$.

Il numero degli elementi di G che non sono 2-elementi sarà perciò $3 \cdot 2^\beta - 2^{\beta+1} = 2^\beta$.

Se in G esistesse una classe completa di elementi coniugati contenente 2^β elementi, allora detto a un elemento appartenente a tale classe si avrebbe $|C_G(a)| = 3$.

Allora a ha necessariamente periodo 3, e si ha $C_G(a) = \langle a \rangle$. Segue che i 2^β elementi di G che non sono 2-elementi sono tutti coniugati tra loro e hanno tutti periodo 3.

Pertanto se b è un 2-elemento, $C_G(b)$ è un 2-gruppo, altrimenti vi sarebbe un elemento $c \in C_G(b)$ di periodo 3, e bc avrebbe periodo 6. Segue che in G non esistono classi complete di elementi coniugati con 2^γ elementi ($\gamma \geq 1$) ad eccezione di quella che contiene i 2^β elementi di periodo 3. Pertanto dal primo membro della disuguaglianza (2.1) si può sottrarre $2^{\beta-1}$, onde

$$4(2^{\beta+1} - 1) - 3 \cdot 2^\beta - 3 \cdot 2^{\beta-1} - 2^{\beta-1} \geq 3 \cdot 2^\beta$$

da cui si ha $-4 \geq 0$ il che è assurdo.

Possiamo pertanto sottrarre al primo membro della disuguaglianza (2.1), oltre che il termine $3 \cdot 2^{\beta-1}$ anche il termine 2^β . Si ha:

$$4(2^{\beta+1} - 1) - 3 \cdot 2^\beta - 3 \cdot 2^{\beta-1} - 2^\beta \geq 3 \cdot 2^\beta$$

da cui $-4 - 2^{\beta-1} \geq 0$ il che è assurdo.

Non esistono perciò gruppi d'ordine $3 \cdot 2^\beta$ con $\beta > 1$ soddisfacenti la proprietà (1.1).

Consideriamo ora il caso (b).

$$|G| = 3^\alpha 2^\beta \text{ con } \alpha, \beta > 1.$$

Supponiamo dapprima che in G non esistano classi complete di elementi coniugati di cardinalità $3^\alpha 2^{\beta-2}$.

La disuguaglianza (2.1) continua a sussistere se al primo membro sottraiamo i termini $3^{\alpha-1} 2^\beta$, $3^\alpha 2^{\beta-1}$ e $3^\alpha 2^{\beta-2}$ che non rappresentano cardi-

nalità di alcuna classe di elementi coniugati. Si ha:

$$\frac{1}{2}(3^{\alpha+1}-1)(2^{\beta+1}-1)-3^{\alpha}\cdot 2^{\beta}-3^{\alpha-1}\cdot 2^{\beta}-3^{\alpha}\cdot 2^{\beta-1}-3^{\alpha}\cdot 2^{\beta-2}\geq 3^{\alpha}\cdot 2^{\beta}.$$

Con facili calcoli si ha:

$$-3^{\alpha-1}\cdot 2^{\beta-1}-2^{\beta+1}-3^{\alpha+1}+1\geq 0 \quad \text{il che è assurdo.}$$

Pertanto se in G non ci sono elementi y tali che $|C_G(y)| = 4$ G non può soddisfare la proprietà (1.1).

Supponiamo quindi che in G esista un elemento y tale che $|C_G(y)| = 4$. Distinguiamo due casi:

$$\text{I) } y^2 \neq 1, y^4 = 1, G_G(y) = \langle y \rangle$$

$$\text{II) } y^2 = 1, C_G(y) \supset \langle y \rangle.$$

Consideriamo il caso I).

y è un elemento di ordine 4 permutabile solo con le sue potenze. Sia S un 2-sottogruppo di Sylow di G a cui y appartiene. Si ha:

$$G_G(y) = \langle y \rangle = C_S(y).$$

Cioè S è un 2-gruppo contenente un elemento di periodo 4 permutabile solo con le sue potenze. La Proposizione 1 di M. Suzuki [4] ci dice allora che S è generato da y e da un altro elemento x con una delle seguenti cinque relazioni:

$$(1) \quad x^2 = 1, \quad xyx^{-1} = y^{-1}$$

$$(2) \quad x^2 = y^2, \quad xyx^{-1} = y^{-1}$$

$$(3) \quad x^{2^m} = y^2, \quad (m \geq 2), \quad yxy^{-1} = x^{-1}$$

$$(4) \quad x^{2^m} = y^2, \quad (m \geq 2), \quad yxy^{-1} = x^{-1}$$

$$(5) \quad x = 1.$$

Se vale (5) $S = \langle y \rangle$, ciclico d'ordine 4. Ma ciò implica che in G esiste un 2-complemento di Sylow normale K .

Il gruppo fattoriale G/K è isomorfo ad S pertanto abeliano, cioè $K \supseteq G'$. Ma per la Proposizione 2.1, G/G' è un 2-gruppo abeliano elementare. Ciò è in contraddizione con il fatto che G/K sia ciclico d'ordine 4; siamo quindi caduti in assurdo. Sia ora vera una delle relazionee (1) o (2).

Sia nel primo che nel secondo caso l'ordine di S è di 2^3 .

Facciamo vedere che i gruppi di ordine $3^{\alpha}\cdot 2^3$ non possono soddisfare la (1.1).

Si ha:

$$(2.3) \quad \frac{1}{2}(3^{\alpha+1}-1)(2^4-1)-3^{\alpha}\cdot 2^3-3^{\alpha-1}\cdot 2^3-3^{\alpha}\cdot 2^2\geq 3^{\alpha}\cdot 2^3$$

da cui $-3^{\alpha-1}-15\geq 0$ il che è assurdo.

Consideriamo ora i casi (3) e (4).

In ambedue i casi x genera un sottogruppo ciclico di ordine $2^{\beta-1}$. Poiché G è razionale, il gruppo quoziente $N_G(x)/C_G(x)$ è isomorfo a tutto il gruppo degli automorfismi di $\langle x \rangle$, che ha per ordine la funzione di Eulero del periodo di x , cioè $2^{\beta-2}$.

Perciò

$$[N_G(x) : C_G(x)] = 2^{\beta-2}.$$

Poiché $\langle x \rangle \subset C_G(x)$, l'ordine del $C_G(x)$ sarà $3^\gamma 2^{\beta-1}$ con γ intero positivo o nullo. Da cui

$$|N_G(x)| = 3^\gamma \cdot 2^{\beta-1} \cdot 2^{\beta-2} = 3^\gamma \cdot 2^{2\beta-3}.$$

Cioè $N_G(x)$ contiene un sottogruppo di ordine $2^{2\beta-3}$.

Poiché $N_G(x) \supseteq S$ e poiché l'ordine dei 2-sottogruppi di Sylow di G è 2^β dovrà essere $2^\beta - 3 = \beta$ da cui $\beta = 3$.

Cioè S ha ordine 2^3 e per la disuguaglianza (2.3) stabilita nei casi (1) e (2), si ha l'assurdo.

Consideriamo ora il caso II).

y è un'involuzione e $|C_G(y)| = 4$.

Sia S un 2-sottogruppo di Sylow di G contenente $C_G(y)$. Come in precedenza, $C_G(y) = C_S(y)$. Per il Lemma 4 di M. Suzuki [3] abbiamo che S è generato da y e da un altro elemento x di ordine $2^{\beta-1}$ con la seguente relazione:

$$y^{-1} x y = y^r$$

dove $r = -1$ oppure $r = -1 + 2^{\beta-2}$ e l'ultimo caso può valere solo quando $\beta > 3$.

Se $\beta = 2$, $C_S(y) = S$, abeliano elementare di ordine 4.

Siano $N = N_G(S)$ e $C = C_G(S)$. Per la Proposizione 1.3, $C = S$.

Facciamo vedere che è anche $N = S$. Se N fosse diverso da S , allora N/S conterrebbe un elemento di ordine 3 che permuterebbe ciclicamente le tre involuzioni di S . Ma allora $S \cap Z(N) = 1$. Per il Teorema (7.4.4) [1] il massimo 2-gruppo fattoriale di G è isomorfo a $S \cap Z(N)$. Cioè G in tal caso non avrebbe sottogruppi normali massimi di indice 2, il che è assurdo, essendo G/G' un 2-gruppo.

Pertanto $N = S = C$, cioè S è nel centro del proprio normalizzante e e per il Teorema di Burnside in G esiste un 2-complemento normale K . Il gruppo fattoriale $G/K \cong S$, cioè un 2-gruppo abeliano elementare, perciò $K = G'$ e G' è nilpotente. Il Teorema 1 di F. M. Markel [2] ci dice che siamo ancora caduti in assurdo.

Sia $\beta > 2$, cioè $S \supsetneq C_S(y)$. Per un ragionamento analogo a quello fatto nel caso I), essendo $[N_G(x) : C_G(x)] = 2^{\beta-2}$ si ha $\beta = 3$.

La disuguaglianza (2.3) stabilisce così l'assurdo.

Non esistono perciò gruppi di ordine $3^\alpha 2^\beta$ con $\alpha, \beta > 1$ che soddisfano la proprietà (1.1).

Il Teorema 2.2 è così completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. GORENSTEIN (1968) – *Finite Groups*. Harper and Row.
- [2] F. M. MARKEL (1973) – *Groups with many conjugate elements*, «Journal of Algebra», 26, 69–74.
- [3] M. SUZUKI (1951) – *A characterization of simple groups* LF (2, ϕ), «Journal Fac. Sc. Un. Tokyo», Section I, 6, 259–293.
- [4] M. SUZUKI (1959) – *On finite groups containing an element of order four which commutes only with its powers*, «Illinois Journal of Math.», 3, 255–271.