Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Paolo De Bartolomeis

## Algebre di Stein nel caso reale

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **58** (1975), n.4, p. 482–486.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_4_482_0>

**Matematica.** — *Algebre di Stein nel caso reale.* Nota di PAOLO DE BARTOLOMEIS, presentata (*) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — We study extensions to real coherent algebras of results given by O. Forster for Stein algebras. The proofs of the statements announced here will appear elsewhere.

In [3] e [4] O. Forster ha studiato alcune proprietà delle algebre di Stein, cioè delle algebre $A = H^0(X, \mathcal{O}_X)$ di sezioni globali su uno spazio di Stein $(X, \mathcal{O}_X)$ non necessariamente ridotto; in particolare egli ha dimostrato che:

*a*) è possibile recuperare da A tutta la struttura di $(X, \mathcal{O}_X)$ che risulta, in sostanza, isomorfo allo spettro massimale chiuso o spettro di Gelfand di A;

*b*) per le algebre di Stein, che non sono noetheriane, si ritrovano gli analoghi di numerose proprietà tipiche degli anelli noetheriani ed in particolare valgono teoremi di decomposizione primaria.

Scopo di questo lavoro è di studiare estensioni dei risultati di Forster al caso reale, cioè al caso di algebre di sezioni globali su spazi analitici reali, dove per spazi analitici reali intenderemo sempre spazi coerenti cioè localmente isomorfi a supporti di fasci coerenti.

Le dimostrazioni dei risultati contenuti in questo lavoro sono in corso di pubblicazione.

## 1. ALGEBRE SPECIALI

Nei lavori di Forster citati viene usato pesantemente il fatto che le algebre di Stein ammettono naturale struttura di spazio di Fréchet; è chiaro che nel caso reale occorre usare delle tecniche diverse: l'idea centrale è quella dell'introduzione della nozione di algebra speciale; si può introdurre la questione con alcune definizioni di carattere più generale:

DEFINIZIONE 1.1. *a*) *Sia $k$ un corpo: si dice spazio $k$–geometrico* $(X, \mathcal{O})$: *il dato di uno spazio topologico* $X$ *e di un fascio* $\mathcal{O}$ *di $k$–algebre di base* $X$;

*b*) *si dice $k$–algebra geometrica l'algebra* $A = H^0(X, \mathcal{O})$ *delle sezioni globali di uno spazio $k$–geometrico.*

DEFINIZIONE 1.2. *Sia $\alpha$ un ideale della $k$–algebra geometrica* $A = H^0(X, \mathcal{O})$: *si dice specializzato di $\alpha$ l'ideale $\hat{\alpha}$ definito da* $\hat{\alpha} = H^0(X, \mathcal{O}\alpha)$, *dove, evidentemente, $\mathcal{O}\alpha$ è il fascio di ideali di $\mathcal{O}$ definito da $\alpha$, cioè*:

$$\forall x \in X \qquad \mathcal{O}_x \alpha = \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_x^i f_x^i \mid m_x^i \in \mathcal{O}_x f \in \alpha \right\}$$

*un ideale $\beta$ si dice speciale se* $\beta = \hat{\beta}$.

(*) Nella seduta del 12 aprile 1975.

È immediato verificare che l'operazione di specializzazione gode di buone proprietà di stabilità: in particolare essa è idempotente cioè $\forall \gamma$ ideale di A $\hat{\hat{\gamma}} = \hat{\gamma}$:

DEFINIZIONE 1.3. *Si dice algebra speciale* $(A, \mathfrak{S})$ *il dato di un'algebra* A *di sezioni globali su uno spazio geometrico e della famiglia* $\mathfrak{S}$ *dei suoi ideali speciali.*

In questo contesto, in opportune condizioni di regolarità, si possono dare dei teoremi di «tipo Spec» astratti: più esattamente, definendo uno spazio $k$-geometrico $(X, \mathcal{O})$ regolare se:

*a*) $\forall x \in X$ $\mathcal{O}_x$ è un anello locale con ideale massimale $\mathcal{M}_x$ t.c. $\mathcal{O}_x / \mathcal{M}_x = k$;

*b*) l'algebra $A = H^0(X, \mathcal{O})$ è sufficientemente ricca da separare, in senso ovvio, i punti.

E definendo spettro speciale della $k$-algebra geometrica A l'insieme $S(A)$ degli omomorfismi di $k$-algebre $\varphi : A \to k$ t.c. $\ker \varphi$ sia speciale, si dimostra il seguente:

LEMMA 1.4. *Se* $(X, \mathcal{O})$ *è uno spazio k-geometrico regolare esiste una bigezione naturale fra* X *e* $S(A)$.

Un problema che sorge in modo abbastanza naturale nell'applicazione di queste formulazioni generali ai casi concreti di spazi geometrici regolari, cioè nel nostro caso gli spazi analitici, è quello dei legami fra struttura speciale e struttura topologica: esso può essere formulato per esempio nella maniera seguente: dato uno spazio geometrico $(X, \mathcal{O})$, è possibile assegnare su $A = H^0(X, \mathcal{O})$ una struttura di spazio topologico, ragionevolmente compatibile con la struttura algebrica, in modo che, dato un ideale $\alpha$ di $A$, $\bar{\alpha} = \hat{\alpha}$?

Risultati classici di H. Cartan ([1] e [2]) risolvono la questione completamente nel caso di $(X, \mathcal{O})$ spazio di Stein: nel caso reale daremo in questo lavoro soltanto legami molto più deboli.

## 2. ALGEBRE REALI COERENTI

Sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio analitico reale: doteremo $A = H^0(X, \mathcal{O})$ della topologia indotta dalla seguente convergenza: una successione $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di elementi di A converge ad $f \in A$ se $\exists (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ complessificazione di Stein di $(X, \mathcal{O})$ cui le $f_n$ e la $f$ siano estendibili e dove $f_n \to f$ per la topologia naturale di $\tilde{A} = H^0(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$: A, con tale struttura, risulta una $\mathbf{R}$-algebra topologica completa e sarà detta algebra reale coerente;

un risultato chiave che permette di usare per le strutture speciali su algebre reali coerenti tutte le tecniche canoniche della teoria degli spazi analitici (Teoremi A e B etc.) è la coerenza, dimostrata da J. Frisch ([5]), dato un ideale $\alpha$ di un'algebra reale coerente, del fascio $\mathcal{O}\alpha$.

Premesso questo, data A algebra reale coerente si può sviluppare la teoria arrivando ai seguenti risultati:

LEMMA 2.1. *Sia* $\alpha \subset A$ *un ideale speciale, allora* $\alpha$ *è chiuso.*

LEMMA 2.2. *Sia* $\mathcal{M}$ *un ideale massimale di* A: *sono fatti equivalenti*:

*i*) $\mathcal{M}$ *è speciale*;

*ii*) $\mathcal{M}$ *è chiuso*

*cioè anche nel caso reale lo spettro speciale e lo spettro massimale chiuso coincidono.*

E l'estensione completa al caso reale del Teorema di Spec di Forster:

TEOREMA 2.3. *La categoria degli spazi di Stein (risp. degli spazi analitici reali) e la categoria delle algebre di Stein (risp. delle algebre reali coerenti) sono anti-equivalenti.*

Il Teorema 2.3. chiarisce anche, dato uno spazio analitico reale $(X, \mathcal{O})$ e posto $A = H^0(X, \mathcal{O})$, come la struttura di algebra speciale $(A, \mathfrak{S})$ che sarà costantemente usata in seguito, è completamente determinata dalla struttura di algebra reale coerente, cioè dalla struttura di **R**-algebra topologica di A: da questa infatti si può ricostruire la spazio $(X, \mathcal{O})$ e quindi la famiglia degli ideali speciali di A: questo indica, in fondo, anche la non arbitrarietà dell'introduzione della nozione di algebra speciale.

## 3. DECOMPOSIZIONE PRIMARIA

Con la struttura speciale è possibile ricostruire abbastanza compiutamente nel caso reale la teoria della decomposizione primaria in algebre di sezioni globali su spazi analitici e delle sue implicazioni geometriche; premettiamo alcune definizioni:

DEFINIZIONE 3.1. *Sia* A *un'algebra di Stein o un'algebra reale coerente, sia* S(A) *il suo spettro speciale*:

a) *dato* $\alpha$ *ideale di* A, *si pone*:

$$V(\alpha) = \{\varphi \in S(A) \mid \varphi(f) = 0 \quad \forall f \in \alpha\}$$

b) *dato* $\alpha$ *ideale di* A, *si pone*:

$$\operatorname{rad}(\alpha) = \bigcap_{\substack{\varphi \in S(A) \\ \ker \varphi \supset \alpha}} \ker \varphi$$

c) *una famiglia* $(\alpha_i)_{i \in I}$ *di ideali di* A *si dice localmente finita se tale è la famiglia* $(V(\alpha_i))_{i \in I}$.

Sulla base di ciò si dimostra, per prima cosa, che vale anche nel caso reale un risultato che assicuri il buon equivalente geometrico di un teorema di decomposizione: l'enunciato complessivo è il seguente:

TEOREMA 3.2. *Sia* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein (risp. uno spazio analitico reale), sia* $(\alpha_i)_{i \in I}$ *una famiglia localmente finita di ideali chiusi (risp. speciali) di* $A = H^0(X, \mathcal{O})$: *si ha*:

i) $V\left(\bigcap_{i \in I} \alpha_i\right) = \bigcup_{i \in I} V(\alpha_i)$

ii) $\operatorname{rad}\left(\bigcap_{i \in I} \alpha_i\right) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{rad} \alpha_i$.

Affrontando più direttamente il problema della decomposizione primaria nelle algebre di Stein e nelle algebre reali coerenti A, si definisce decomposizione primaria canonica di $\alpha$ ideale di A la rappresentazione $\alpha = \bigcap_{i \in I} q_i$ di $\alpha$ come intersezione di una famiglia localmente finita di ideali primari speciali (cioè, ovviamente, chiusi nel caso complesso) t.c. se $I_0 \subsetneq I$ $\alpha \subsetneq \bigcap_{i \in I_0} q_i$ ed inoltre i primi associati siano a due a due disgiunti:

si dimostra il seguente risultato:

TEOREMA 3.3. *Sia* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein (risp. uno spazio analitico reale)*, $A = H^0(X, \mathcal{O})$ *sia l'algebra associata e* $\alpha$ *sia un ideale chiuso (risp. speciale) di* A:

i) $\alpha$ *ammette decomposizione primaria canonica* $\alpha = \bigcap_{i \in I} q_i$;
*nel caso complesso si ha inoltre*:

ii) *i primi associati sono determinati univocamente*;

iii) *le componenti isolate associate sono determinate univocamente*.

Nel caso complesso l'interpretazione geometrica è diretta: sempre in [3] Forster ha dimostrato un'estensione agli spazi di Stein del Nullstellensatz, provando che se $q$ è un ideale primario chiuso in un'algebra di Stein allora $\operatorname{rad} q = \sqrt{q}$; dato quindi un ideale chiuso $\alpha$ in un'algebra di Stein A si ha:

$$\alpha = \bigcap_{i \in I} q_i \qquad e\ V(\alpha) = V\left(\bigcap_{i \in I} q_i\right) = \bigcup_{i \in I} V(q_i) = \bigcup_{i \in I} V(\sqrt{q_i})$$

dove è immediato verificare che i $V(\sqrt{q_i})$ sono sottospazi analitici irriducibili: in particolare per $\alpha = \{0\}$ si ritrova per via algebrica, per gli spazi di Stein, il teorema di decomposizione in componenti irriducibili degli spazi analitici complessi.

Con tecniche molto diverse si può dare di questo fatto geometrico una dimostrazione valida anche nel caso reale: occorre per prima cosa dare una buona definizione di irriducibilità:

DEFINIZIONE 3.4. *Sia* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio analitico reale*: $Y \subset X$ *si dice sottoinsieme analitico coerente se* $\exists \alpha$ *ideale di* $A = H^0(X, \mathcal{O})$ *t.c.* $V(\alpha) = Y$.

DEFINIZIONE 3.5. *Un sottoinsieme analitico coerente di uno spazio analitico reale si dice irriducibile se non è unione propria di due sottoinsiemi analitici coerenti.*

In base a ciò si può dedurre dal teorema di decomposizione primaria la decomposizione, unica, di uno spazio analitico reale in sottospazi analitici reali coerenti irriducibili: si ha infatti il seguente:

LEMMA 3.6. *Sia* A *un'algebra reale coerente e* $\alpha \subset A$ *un ideale t.c.* $\alpha = \operatorname{rad} \alpha$; *sia* $\alpha = \bigcap_{i \in I} q_i$ *una decomposizione primaria canonica (che esiste perchè* $\alpha$ *è necessariamente speciale): allora i primi associati* $p_i = \sqrt{q_i}$ *sono univocamente determinati; sono altresì univocamente determinati i* $\operatorname{rad}(q_i)$ *che risultano ideali primi.*

In possesso di questo enunciato il passaggio al risultato geometrico è di routine.

## BIBLIOGRAFIA


[1] CARTAN H. (1944) – *Idéaux de fonctions analytiques de variables complexes*, « Ann. Ecole Normale Sup. », *61*, 149–197.

[2] CARTAN H. (1950) – *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes*, « Bull. Soc. Math. de France », *78*, 28–64.

[3] FORSTER O. (1964) – *Primärzerlegung in Steinschen Algebren*, « Math. Annalen », *154*, 307–329.

[4] FORSTER O. (1967) – *Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln* « Math. Zeitschrift », *97*, 376–405.

[5] FRISCH J. (1967) – *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes* « Inventiones Math. », *4*, 118–138.