Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mihai Dediu

Sopra la metrica Vranceanu generalizzata

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **58** (1975), n.3, p. 354–359.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_58_3_354_0>

Geometria differenziale. — *Sopra la metrica Vranceanu generalizzata.* Nota di MIHAI DEDIU, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RÉSUMÉ. — Dans ce travail nous allons généraliser la métrique de l'espace lenticulaire $L^{2n+1}(p)$ qui a été determinée par G. Vranceanu dans [3], et nous allons demontrer quelques propriétés de cette métrique généralisée.

INTRODUZIONE

Ricordiamo dapprima la definizione dello spazio lenticolare [1].

Sia $R^{2n+2}(x_0, x_1, \cdots, x_{2n+1})$ lo spazio euclideo reale $(2n+2)$–dimensionale isomorfo allo spazio euclideo complesso $C^{n+1}(z_0, \cdots, z_n)$, dove

$$z_h = x_{2h} + ix_{2h+1}, \qquad (h = 0, 1, \cdots, n).$$

Consideriamo la sfera $S^{2n+1}(R) \subset R^{2n+2}$ definita dalla

$$\sum_{k=0}^{n} z_k \bar{z}_k = R^2, \tag{1}$$

dove R è un numero reale positivo, e la rotazione

$$f: S^{2n+1}(R) \to S^{2n+1}(R)$$

definita dalle

$$f(z_h) = z'_h = e^{\frac{2\pi i p_h}{p}} z_h, \qquad (h = 0, 1, \cdots, n),$$

dove $p, p_0, p_1, \cdots, p_n$ sono numeri interi non nulli, p e p_h sono primi fra loro e $|p| \neq 1$. Questa rotazione genera un gruppo ciclico finito d'ordine p [2], $G = \{I, f, f^2, \cdots, f^{p-1}\}$, dove $I = f^p$ è la transformazione identica. Lo spazio lenticolare di dimensione $2n+1$ è lo spazio delle orbite di G su $S^{2n+1}(R)$; $L^{2n+1}[p, R; p_0, \cdots, p_n] = S^{2n+1}(R)/G$. Se $p_0 = \cdots = p_n = 1$, porremo $L^{2n+1}[p; 1, \cdots, 1] = L^{2n+1}(p, R)$.

Consideriamo l'invariante di grado p

$$z_{h_1}^{j_1} z_{h_2}^{j_2} \cdots z_{h_q}^{j_q} \qquad (j_1 + j_2 + \cdots + j_q = p),$$

dove $j_1, j_2, \cdots, j_q$ sono numeri naturali, $1 \leq q \leq n+1$ e $h_1, h_2, \cdots, h_q \in \in \{0, \cdots, n\}$. Osserviamo che

$$\left(\sum_{k=0}^{n} z_k \bar{z}_k\right)^p = \sum_{j_1 + \cdots + j_q = p} \left[\frac{p!}{j_1! \cdots j_q!} (z_{h_1} \bar{z}_{h_1})^{j_1} \cdots (z_{h_q} \bar{z}_{h_q})^{j_q}\right] = R^{2p}. \tag{2}$$

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1975.

Otteniamo un'immersione dello spazio lenticolare $L^{2n+1}(p, R)$ considerando

$$v_{j_1 \cdots j_q} = \sqrt{\frac{p!}{j_1! \cdots j_q!}}\, z_{h_1}^{j_1} \cdots z_{h_q}^{j_q}; \tag{3}$$

l'immersione è sulla sfera

$$\sum_{j_1+\cdots+j_q=p} (v_{j_1 \cdots j_q} \cdot \bar{v}_{j_1 \cdots j_q}) = R^{2p}$$

dello spazio complesso delle variabili $v_{j_1 \cdots j_q}$.

Nel caso particolare degli spazi lenticolari $L^3(p, R)$, l'immersione (3) si scrive

$$v_r = \sqrt{C_p^r}\, z_0^{p-r} z_1^r \qquad (r = 0, 1, \cdots, p).$$

LA METRICA DELLO SPAZIO LENTICOLARE $L^{2n+1}(p, R)$

PROPOSIZIONE 1. *La metrica dello spazio lenticolare* $L^3(p, R)$ *può venir scritta in coordinate complesse sotto la forma*

$$ds^2 = pR^{2(p-1)}(dz_0\, d\bar{z}_0 + dz_1\, d\bar{z}_1) + p(p-1)\, R^{2(p-2)}(z_0\, d\bar{z}_0 + z_1\, d\bar{z}_1)(\bar{z}_0\, dz_0 + \bar{z}_1 dz_1). \tag{4}$$

Dimostrazione. Per determinare la metrica dello spazio lenticolare $L^3(p, R)$ calcoliamo

$$ds^2 = \sum_{r=0}^{p} dv_r\, d\bar{v}_r = \sum_{r=0}^{p} \{C_p^r [(p-r)\, z_0^{p-r-1} z_1^r\, dz_0 + r z_0^{p-r} z_1^{r-1}\, dz_1] \cdot$$
$$\cdot [(p-r)\, \bar{z}_0^{p-r-1} \bar{z}_1^r\, d\bar{z}_0 + r \bar{z}_0^{p-r_0} \bar{z}_1^{r-1}\, d\bar{z}_1]\}.$$

Scrivendo questa formula sotto la forma

$$ds^2 = a\, dz_0\, d\bar{z}_0 + b\, (\bar{z}_0\, dz_0\, z_1\, d\bar{z}_1 + z_0\, d\bar{z}_0\, \bar{z}_1\, dz_1) + c\, dz_1\, d\bar{z}_1$$

risulta che

$$a = \sum_{r=0}^{p} C_p^r (p-r)^2 (z_0 \bar{z}_0)^{p-r} (z_1 \bar{z}_1)^{r-1},$$

$$b = \sum_{r=0}^{p} C_p^r\, r\, (p-r)\, (z_0 \bar{z}_0)^{p-r-1} (z_1 \bar{z}_1)^{r-1} (p-r),$$

$$c = \sum_{r=0}^{p} C_p^r\, r^2 (z_0 \bar{z}_0)^{p-r} (z_1 \bar{z}_1)^{r-1}.$$

Relativamente al coefficiente a, osserviamo che per $r = p$ esso vale zero; dunque l'ultimo termine non nullo di a è quello che si ottiene prendendo $r = p - 1$, cioè $p (z_1 \bar{z}_1)^{p-1}$. Usufruendo della (2), che nel nostro caso si scrive

$$(z_0 \bar{z}_0 + z_1 \bar{z}_1)^{p-1} = \sum_{r=0}^{p-1} C_{p-1}^r (z_0 \bar{z}_0)^{p-r-1} (z_1 \bar{z}_1)^r = R^{2(p-1)}, \tag{5}$$

risulta

$$a = pR^{2(p-1)} + \sum_{r=0}^{p-2} (C_p^r (p-r)^2 - p C_{p-1}^r)\, (z_0 \bar{z}_0)^{p-r-1} (z_1 \bar{z}_1)^r.$$

Tenendo conto che

$$C_p^r (p - r)^2 - pC_{p-1}^r = p(p-1)\, C_{p-2}^r$$

e utilizzando la (5) si ha la formula

$$a = pR^{2(p-2)}\, [R^2 + (p-1)\, z_0 \bar{z}_0].$$

Per il coefficiente b, osserviamo che se $r = p$ allora $b = 0$; dunque

$$b = \sum_{r=1}^{p-1} C_p^r\, r\, (p-r)\, (z_0 \bar{z}_0)^{p-r-1}\, (z_1 \bar{z}_1)^{r-1}.$$

Poiché

$$C_p^r (p-r)\, r = p(p-1)\, C_{p-2}^{r-1},$$

risulta

$$b = p(p-1)\, R^{2(p-2)}.$$

Nel caso di c, osserviamo che per $r = 0$ otteniamo $c = 0$ e per $r = 1$ risulta $p(z_0 \bar{z}_0)^{p-1}$. Eliminando questo termine coll'aiuto della (5), otteniamo

$$c = pR^{2(p-1)} + \sum_{r=1}^{p-1} [(r+1)^2\, C_p^{r+1} - pC_{p-1}^r]\, (z_0 \bar{z}_0)^{p-r-1}\, (z_1 \bar{z}_1)^r.$$

Tenendo conto che $C_p^{r+1} (r+1)^2 - pC_{p-1}^r = p(p-1)\, C_{p-2}^{r-1}$ e utilizzando ancora una volta la (5), risulta

$$c = pR^{2(p-2)}\, [R^2 + (p-1)\, z_1 \bar{z}_1].$$

Ponendo i valori di a, b, c nella formula della metrica, otteniamo la (4).

COROLLARIO 1.1. *Nelle coordinate reali* x, y, u, v $(z_0 = x + iy$ $z_1 = u + iv)$, *la metrica* (4) *dello spazio lenticolare* $L^3(p, R)$ *si scrive* $ds^2 = pR^{2(p-1)}\, (dx^2 + dy^2 + du^2 + dv^2) + p(p-1)\, R^{2(p-2)}\, (x\, dx + y\, dy + u\, du + v\, dv)^2 + (x\, dy - y\, dx + u\, dv - v\, du)^2$.

PROPOSIZIONE 2. *La metrica dello spazio lenticolare* $L^{2n+1}(p, R)$ *è data dalla formula*

$$ds^2 = pR^{2(p-1)} \sum_{i=0}^{2n+1} (dx_i)^2 + p(p-1)\, R^{2(p-2)} \left[\left(\sum_{i=0}^{2n+1} x_i\, dx_i^{\,2} \right) + \left(\sum_{s=0}^{n} (x_{2s}\, dx_{2s+1} - x_{2s+1}\, dx_{2s}) \right)^2 \right]. \tag{6}$$

La dimostrazione risulta dal Corollario 1.1.

Usando la formula (1) otteniamo il

COROLLARIO 2.1. *La metrica* (6) *può anche venir scritta sotto la forma*

$$ds^2 = p \left(\sum_{i=0}^{2n+1} x_i^2 \right)^{p-1} \left[\sum_{i=0}^{2n+1} (dx_i)^2 \right] + p(p-1) \left(\sum_{i=0}^{2n+1} x_i^2 \right)^{p-2} \cdot \left[\left(\sum_{i=0}^{2n+1} x_i\, dx_i \right)^2 + \left(\sum_{s=0}^{n} (x_{2s}\, dx_{2s+1} - x_{2s+1}\, dx_{2s}) \right)^2 \right]. \tag{7}$$

Si verifica facilmente che per $R = 1$ s'ottiene la metrica dello spazio lenticolare $L^{2n+1}(p)$ ottenuta da G. Vranceanu in [3]. Perciò, la metrica dello spazio lenticolare $L^{2n+1}(p, R)$ data dalla formula (6) o (7) viene chiamata la metrica Vranceanu generalizzata dello spazio lenticolare $L^{2n+1}(p, R)$.

ALCUNE PROPRIETÀ DELLA METRICA VRANCEANU GENERALIZZATA

Porremo

$$i' = i + (-1)^i \tag{8}$$

e utilizzeremo gli indici muti, cioè quando in un monomio compaiono 2 indici (i e i) o (i e i') si sottintende di fare la somma rispetto a questi indici.

PROPOSIZIONE 3. *Il tensore metrico della metrica* (7) *ha le componenti*

$$a_{ij} = p\,(x_k x_k)^{p-2}\,[x_k x_k \delta^i_j + (p-1)\,(x_i x_j + (-1)^{i+j} x_{i'} x_{j'})]. \tag{9}$$

Infatti, per la (7), avuto riguardo alla (8),

$$ds^2 = p\,(x_k x_k)^{p-1}\,dx_i\,dx_i + p\,(p-1)\,(x_k x_k)^{p-2}$$

$$[x_i x_j\,dx_i\,dx_j + (-1)^{i+j} x_{i'} x_{j'}\,dx_i\,dx_j]\,, \qquad (i\,, j\,, k = 0\,, 1\,, \cdots, 2n+1),$$

da dove segue appunto la (9).

PROPOSIZIONE 4. *La curvatura totale dello spazio con la metrica* (7), *nel caso* $n = 0$, *è nulla.*

Dimostrazione. Per $n = 0$, il tensore metrico (9) ha le componenti

$$a_{00} = a_{11} = p^2\,(x_0^2 + x_1^2)^{p-1} \quad , \quad a_{01} = a_{10} = 0\,;$$

dunque la metrica si scrive $ds^2 = p^2\,(x_0^2 + x_1^2)^{p-1}\,(dx_0^2 + dx_1^2)$. Per calcolare la curvatura totale utilizziamo la formula

$$K = -\frac{1}{2\,E}\left[\frac{\partial\left(\dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial x_0}\right)}{\partial x_0} + \frac{\partial\left(\dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial x_0}\right)}{\partial x_1}\right],$$

dove

$E = p^2\,(x_0^2 + x_1^2)^{p-1}$. Si ha $\dfrac{\partial E}{\partial x_0} = 2p^2\,(p-1)\,x_0\,(x_0^2 + x_1^2)^{p-2} = E_{x_0}\,;$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{E_{x_0}}{E}\right)}{\partial x_0} = \frac{2\,(p-1)\,(x_1^2 - x_0^2)}{(x_0^2 + x_1^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial x_1} = 2p^2\,(p-1)\,x_1\,(x_0^2 + x_1^2)^{p-2} = E_{x_1}\,;$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{E_{x_1}}{E}\right)}{\partial x_1} = \frac{2\,(p-1)\,(x_0^2 - x_1^2)}{(x_0^2 + x_1^2)^2}\,.$$

Risulta quindi che $K = 0$.

PROPOSIZIONE 5. *Il determinante delle componenti del tensore metrico* (9) *è dato della formula*

$$A_{2n+2} = p^{2n+4}\,(x_k\,x_k)^{(2n+2)(p-1)}\,, \qquad k = 0\,,1\,,\cdots,2\,n+1. \tag{10}$$

Dimostrazione. Per $n = 0$ si ha

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{00} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{vmatrix} = p^4\,(x_0^2 + x_1^2)^{2(p-1)}.$$

Per $n = 1$ si ha $A_4 = p^6\,(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{4(p-1)}$. Ed ora la (10) si verifica par induzione.

PROPOSIZIONE 6. *I reciproci delle componenti del tensore metrico* (9) *sono*

$$a^{ij} = \frac{1}{p^2\,(x_k x_k)^p}\,[p\delta^i_j\,x_k\,x_k - (p-1)\,(x_i\,x_j + (-1)^{i+j} x_{i'}\,x_{j'})]. \tag{11}$$

Infatti, si verifica che $a^{ij}\,a_{jk} = \delta^i_k$.

PROPOSIZIONE 7. *I simboli di Christoffel di prima specie dello spazio di Riemann con la metrica* (6) *sono*

$$\begin{aligned} |\,ij\,,k\,| = p(p-1)\,(x_h\,x_h)^{p-3}\,[x_h\,x_h(\delta^j_k\,x_i + \delta^i_k\,x_j + (-1)^{i+k}\,\delta^{k'}_j\,x_{i'} + \\ + (-1)^{j+k}\,\delta^{k'}_i\,x_{j'}) + (p-2)\,(x_i\,x_j\,x_k + (-1)^{j+k}\,x_i\,x_{j'}\,x_{k'} + \\ + (-1)^{i+k}\,x_{i'}\,x_j\,x_{k'} - (-1)^{i+j}\,x_{i'}\,x_{j'}\,x_k)]. \end{aligned} \tag{12}$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} = 2\,p\delta^j_k(p-1)\,(x_h\,x_h)^{p-2}\,x_i + 2\,p\,(p-1)\,(p-2)\,(x_h\,x_h)^{p-3}\,x_i\,x_j\,x_k + \\ + p\,(p-1)\,(x_h\,x_h)^{p-2}\,\delta^j_i\,x_k + p\,(p-1)\,(x_h\,x_h)^{p-2}\,\delta^k_i\,x_j + \\ + 2\,(-1)^{j+k}\,p\,(p-1)\,(p-2)\,(x_h\,x_h)^{p-3}\,x_i\,x_{j'}\,x_{k'} + (-1)^{j+k}\,p\,(p-1)\cdot \\ \cdot (x_h\,x_h)^{p-2}\,\delta^{j'}_i\,x_{k'} + 2\,(-1)^{j+k}\,p\,(p-1)\,(x_h\,x_h)^{p-2}\,\delta^{k'}_i\,x_{j'}\,. \end{aligned}$$

Usufruendo della formula

$$|\,ij\,,k\,| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right),$$

si ottiene la (12).

PROPOSIZIONE 8. *I simboli di Christoffel di seconda specie sono*

$$(13)\qquad \left|\begin{matrix} & r & \\ i & & j\end{matrix}\right| = \frac{(p-1)}{(x_h x_h)^2}\,[x_h x_h(\delta^j_r x_i + \delta^i_r x_j + (-1)^{i+r}\delta^j_{r'} x_{i'} + (-1)^{j+r}\delta^i_{r'} x_{j'}) - x_i x_j x_r - (-1)^{j+r} x_i x_{j'} x_{r'} - (-1)^{i+r} x_{i'} x_j x_{r'} + (-1)^{i+j} x_{i'} x_{j'} x_r].$$

Infatti, usufruendo della

$$\left|\begin{matrix} & r & \\ i & & j\end{matrix}\right| = a^{rk}\,|\,ij\,,k\,|$$

e delle (11) e (12), si ottiene la (13).

PROPOSIZIONE 9. *La connessione di Levi-Civita dello spazio Riemann con la metrica* (7) *ha le componenti*

$$(14)\qquad \Gamma^i_{jk} = \frac{1-p}{(x_h x_h)^2}\,[x_h x_h(\delta^j_r x_i + \delta^i_r x_j + (-1)^{i+r}\delta^j_{r'} x_{i'} + (-1)^{j+r}\delta^i_{r'} x_{j'}) - x_i x_j x_r - (-1)^{j+r} x_i x_{j'} x_{r'} - (-1)^{i+r} x_{i'} x_j x_{r'} + (-1)^{i+j} x_{i'} x_{j'} x_r].$$

Lo si verifica subito utilizzando la definizione della connessione di Levi-Civita.

COROLLARIO 9.1. *Le equazioni differenziali delle geodetiche dello spazio di Riemann con la metrica* (7) *sono*

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} - \Gamma^i_{jk}\frac{dx_j}{dt}\frac{dx_k}{dt} = 0\,,$$

dove Γ^i_{jk} *designano le componenti della connessione di Levi-Civita* (14).

COROLLARIO 9.2. *Lo spazio Riemann con la metrica* (7) *è uno spazio simmetrico rispetto all'origine delle coordinate.*

BIBLIOGRAFIA

[1] MIHAI DEDIU (1969) – *On the lens spaces*, « Rev. Roum. Math. Pures et Appl. », *16*, 5.
[2] BENIAMINO SEGRE (1961) – *Lectures on Modern Geometry*, Roma, Edizioni Cremonese.
[3] G. VRANCEANU (1965) – *Sopra gli spazi proiettivi e lenticolari*, « Ann. Mat. Pura Appl. », *70*, 235–248.